Módulo 4 – Sistema de Partículas e Momento Linear

Momento linear

Momento linear (quantidade de movimento) de uma partícula: $\vec{p} = m\vec{v}$

- Grandeza vetorial
- Unidades S.I. : kg.m/s

Momento linear e 2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Se a massa é constante:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \Rightarrow \boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

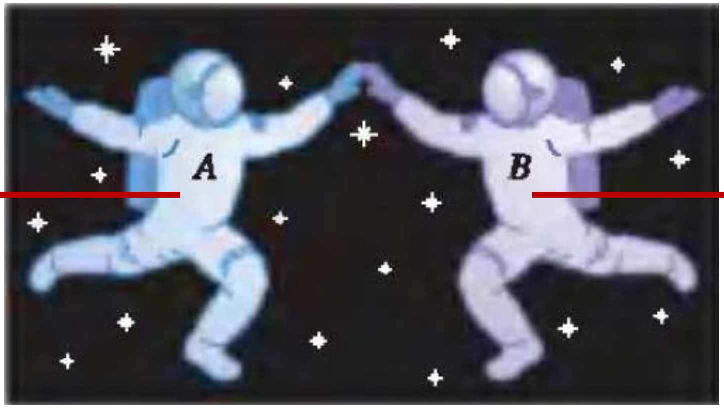
Formulação original de Newton da sua 2ª Lei

Conservação do momento linear

Considere um **sistema isolado**: Ausência de **forças externas**

Exemplo: Par de astronautas, onde há apenas **forças internas**

$\vec{F}_{B\,\mathrm{sobre}\,A}$



$\vec{F}_{A\,\mathrm{sobre}\,B}$

Par ação-reação: $\vec{F}_{A\,\mathrm{sobre}\,B} = -\vec{F}_{B\,\mathrm{sobre}\,A}$

Pela 2ª Lei: $\begin{cases} \vec{F}_{A\,\mathrm{sobre}\,B} = \dfrac{d\vec{p}_B}{dt} \\ \vec{F}_{B\,\mathrm{sobre}\,A} = \dfrac{d\vec{p}_A}{dt} \end{cases}$

Assim: $$\vec{F}_{A\,\mathrm{sobre}\,B} + \vec{F}_{B\,\mathrm{sobre}\,A} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} + \frac{d\vec{p}_A}{dt} = \frac{d\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B\right)}{dt} = 0$$

Definindo o **momento linear total**: $\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$

Temos: $$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

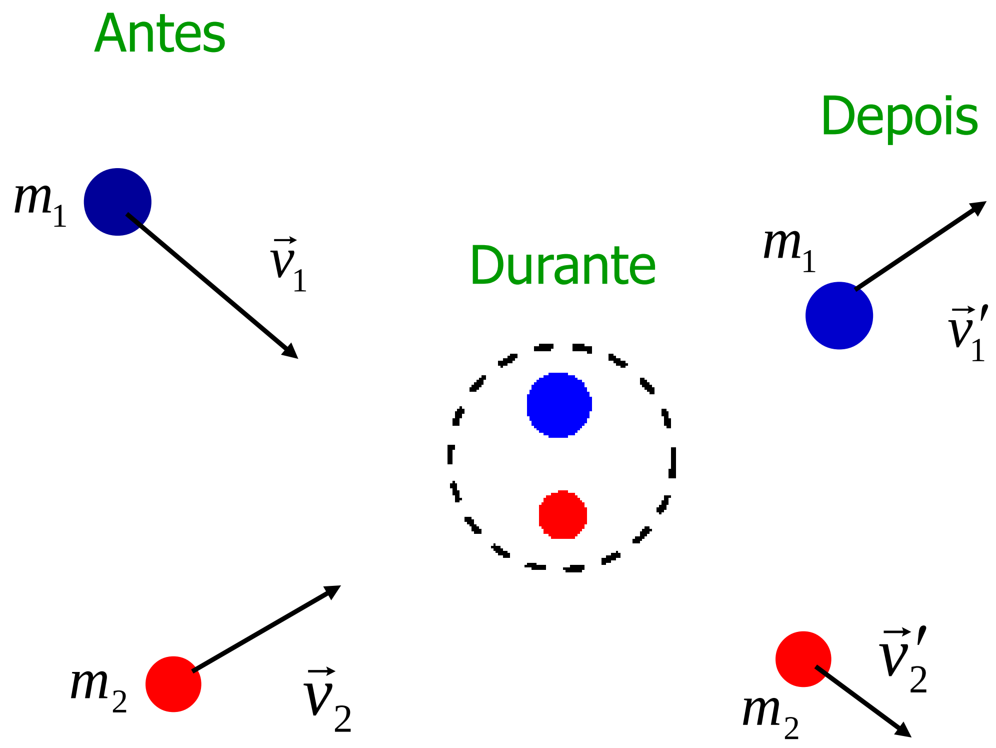
Na ausência de forças externas (sistema isolado), **ou se a resultante das forças externas for nula**, o momento linear total se conserva

Lei de Conservação do Momento Linear:

- Pode ser facilmente generalizada para um número qualquer de partículas

- É consequência da 3ª Lei de Newton

Colisões

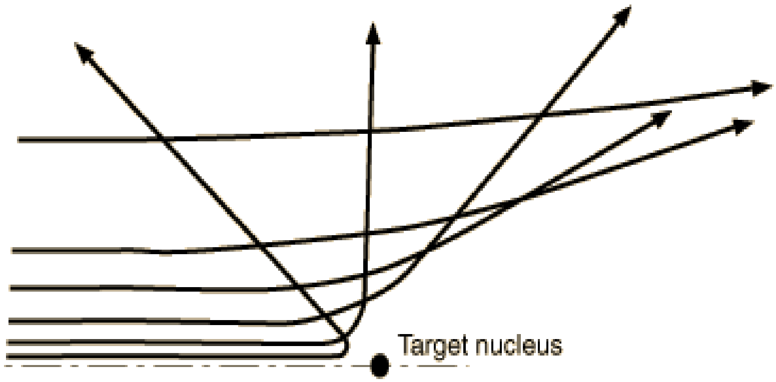


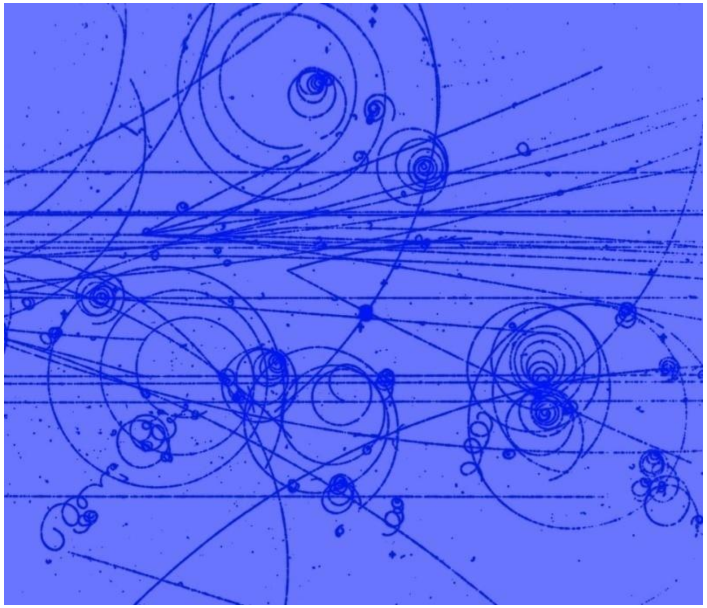
Interação entre pares de partículas com duração extremamente curta. Muitas vezes não conhecemos os detalhes da interação, temos acesso apenas às velocidades logo antes e logo depois da colisão.

Aplicações

Física de partículas elementares

Rutherford (descoberta do núcleo)





Na maioria das colisões, podemos supor um **sistema isolado**: Forças internas têm tipicamente duração muito mais curta e intensidade muito maior que as forças externas – podemos usar a conservação do momento linear

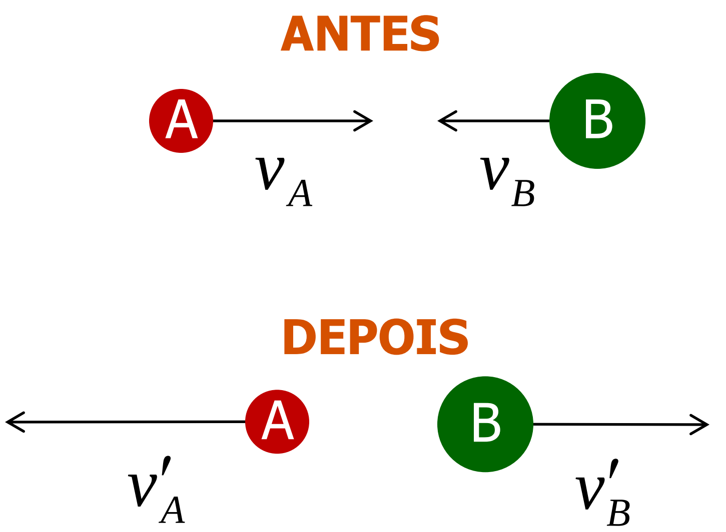
No entanto, a energia cinética não se conserva necessariamente:

- **Colisão elástica:** energia se conserva

- **Colisão inelástica:** energia não se conserva

- **Colisão totalmente inelástica:** perda de energia cinética é máxima (partículas ficam grudadas depois da colisão)

Colisões elásticas



Caso geral em 1D

Conservação do momento linear:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

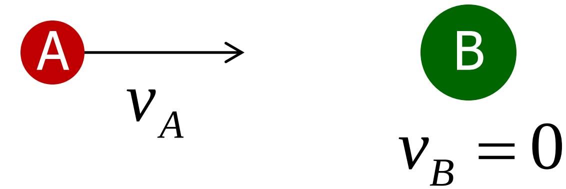
Conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

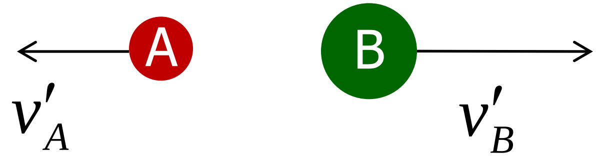
Conhecendo-se as massas e as velocidades iniciais, podemos obter as velocidades finais (2 equações e 2 incógnitas)

Caso particular em 1D: uma das massas inicialmente parada

ANTES



DEPOIS



Conservação do momento linear:

$$m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B$$

Conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

Depois de alguma álgebra:

$$\begin{cases} v'_A = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A \\[2ex] v'_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \end{cases}$$

Caso ainda mais particular: $m_A = m_B$ $\begin{cases} v'_A = 0 \\ v'_B = v_A \end{cases}$

Procedimento experimental

Seguindo o guia de laboratório, faremos 2 experimentos: colisão elástica e colisão totalmente inelástica

I – Colisão Elástica

a. Selecionar 2 carrinhos com massas idênticas
b. Verificar a instalação do centelhador para que ele registre o movimento de ambos carrinhos
c. Montar uma tabela x(t) para os dois carrinhos
d. Obter, a partir do programa de ajuste linear, as respectivas velocidades
e. Verificar a conservação do momento linear e da energia cinética
f. Fazer gráfico x(t) para os dois carrinhos na mesma folha de papel

Incertezas

Momento linear de uma partícula:

$$p = mv$$

$$\delta p = p\sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v}\right)^2}$$

Se pudermos desprezar a incerteza da massa: $\delta p = \dfrac{p\,\delta v}{v}$

Momento linear total de 2 partículas:

$$P = p_A + p_B$$

$$\delta P = \sqrt{\left(\delta p_A\right)^2 + \left(\delta p_B\right)^2}$$

Energia cinética de uma partícula (como vimos no Módulo 3):

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\delta K = K \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta v}{v}\right)^2}$$

Se pudermos desprezar a incerteza da massa: $\delta K = \dfrac{2K\delta v}{v}$

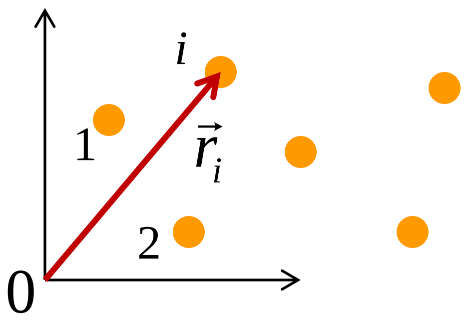
Energia cinética total de duas partículas:

$$K = K_A + K_B$$

$$\delta K = \sqrt{(\delta K_A)^2 + (\delta K_B)^2}$$

(fim da primeira aula)

Centro de massa



Posição do centro de massa de um sistema de *N* partículas:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Média, ponderada pelas massas, das posições das partículas

Em componentes:

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

(idem para y e z)

Movimento do centro de massa

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

Velocidade do centro de massa:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

Massa total: $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$

$$M\vec{V}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \vec{P}$$ (momento linear total)

Momento linear total é igual à massa total multiplicada pela velocidade do centro de massa

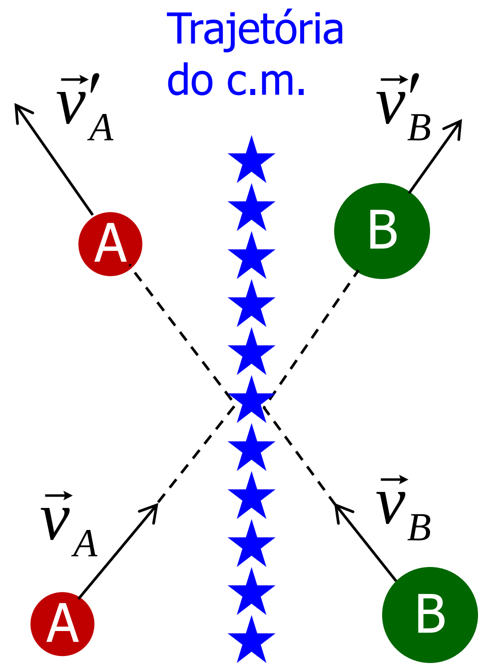
Como vimos, se a resultante das forças externas for nula, ou se o sistema for isolado:

$$\vec{P} = \text{constante} \Rightarrow \vec{V}_{cm} = \text{constante}$$

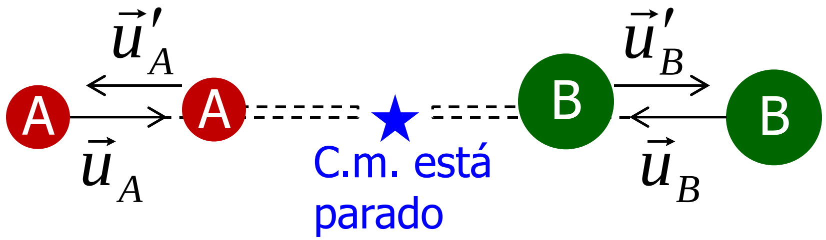
Colisões no referencial do centro de massa:

- ausência de forças externas, velocidade do c.m. permanece inalterada pela colisão

- referencial do c.m. é inercial



Referencial do laboratório



Referencial do c.m.

Velocidades no referencial do centro de massa:

$$\begin{cases} \vec{u}_A = \vec{v}_A - \vec{V}_{cm} \\ \vec{u}_B = \vec{v}_B - \vec{V}_{cm} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{u}'_A = \vec{v}'_A - \vec{V}_{cm} \\ \vec{u}'_B = \vec{v}'_B - \vec{V}_{cm} \end{cases}$$

Conservação do momento linear:

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}\,'_A + m_B\vec{v}\,'_B$$

$$m_A\left(\vec{u}_A + \vec{V}_{cm}\right) + m_B\left(\vec{u}_B + \vec{V}_{cm}\right) = m_A\left(\vec{u}\,'_A + \vec{V}_{cm}\right) + m_B\left(\vec{u}\,'_B + \vec{V}_{cm}\right)$$

$$m_A\vec{u}_A + m_B\vec{u}_B = m_A\vec{u}\,'_A + m_B\vec{u}\,'_B$$

Momento linear também se conserva no referencial do centro de massa (como esperado, pois trata-se de um referencial inercial)

Energia cinética no referencial do lab:

Antes: $$E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

Mudança de variáveis para velocidade do c.m. e velocidade relativa:

$$\begin{cases} \vec{V}_{cm} = \dfrac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} \\ \vec{v}_{rel} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{u}_A - \vec{u}_B \text{ (independe do referencial)} \end{cases}$$

Invertendo, obtemos:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{V}_{cm} + \dfrac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_{rel} \\ \vec{v}_B = \vec{V}_{cm} - \dfrac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v}_{rel} \end{cases}$$

Substituindo na expressão para a energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_A \left(\vec{V}_{cm} + \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_{rel} \right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\vec{V}_{cm} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v}_{rel} \right)^2$$

Após alguma álgebra:

$$E_c = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_{rel}^2$$

Definindo:

$M = m_A + m_B$ (massa total) e

$\mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ (massa reduzida)

Obtemos finalmente:

$$E_c = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2$$

Energia cinética do movimento do centro de massa

Energia cinética do movimento relativo

Análise:

1. Parece com a expressão da energia cinética de duas "partículas"

2. No referencial do c.m., temos:

$$E_c^{cm} = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 \quad (\text{vel. do c.m.} = 0)$$

Ou seja, a energia cinética depende do referencial, e a energia cinética mínima é aquela calculada no referencial do c.m.

3. Antes e depois de uma colisão, a velocidade do c.m. não varia, de modo que a variação da energia cinética é:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu v'^2_{rel} - \frac{1}{2}\mu v^2_{rel}$$

Ou seja, a variação de energia cinética não depende do referencial (como esperado)

4. Em uma colisão elástica, temos:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu v'^2_{rel} - \frac{1}{2}\mu v^2_{rel} = 0 \Rightarrow \left|\vec{v}_{rel}\right| = \left|\vec{v}'_{rel}\right|$$

Ou seja, o módulo da velocidade relativa não é alterado pela colisão

5. A perda máxima de energia cinética (colisão totalmente inelástica), ocorre quando:

$$\Delta E_c = \cancelto{0}{\frac{1}{2}\mu v'^2_{rel}} - \frac{1}{2}\mu v^2_{rel} = -\frac{1}{2}\mu v^2_{rel}$$

Desta forma, explica-se porque as partículas ficam “grudadas” depois de uma colisão totalmente inelástica

Procedimento experimental

II – Colisão Totalmente Inelástica

a. Selecionar 2 carrinhos com massas diferentes: o carrinho inicialmente em repouso deve ter massa 100g maior que a do carrinho incidente
b. Verificar a instalação do centelhador para que ele registre o movimento de ambos carrinhos
c. Montar a seguinte tabela:

t(s)	x1 (cm)	δx1 (cm)	x2 (cm)	δx2 (cm)	X_{CM} (cm)	δX_{CM} (cm)	x'_1 (cm)	$\delta x'_1$ (cm)	x'_2 (cm)	$\delta x'_2$ (cm)
0,0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

d. Seguindo o guia, calculamos a energia e o momento linear antes e depois da colisão, em ambos referenciais
e. Fazer gráficos de x1, x2 e XCM em uma folha
f. Fazer gráficos de x'_1 e x'_2 (posições no ref. Do CM) em outra folha

Incertezas

Posição do centro de massa: $$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\delta X_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2\left(\delta x_1\right)^2 + m_2^2\left(\delta x_2\right)^2} = 0{,}1\,\mathrm{cm} \times \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{m_1 + m_2}$$

(desprezando as incertezas nas massas)

Posições no referencial do CM: $$x_i' = x_i - X_{cm}$$

$$\delta x_i' = \sqrt{\left(\delta x_i\right)^2 + \left(\delta X_{cm}\right)^2}$$