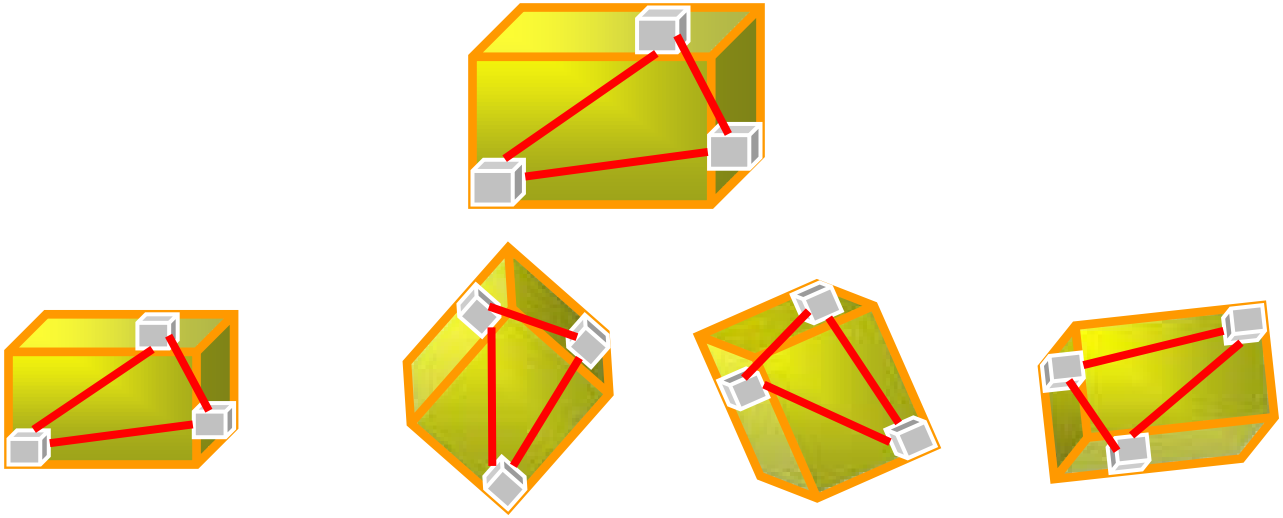
Capítulo 9 – Rotação de corpos rígidos

Definição de **corpo rígido (CR)**:

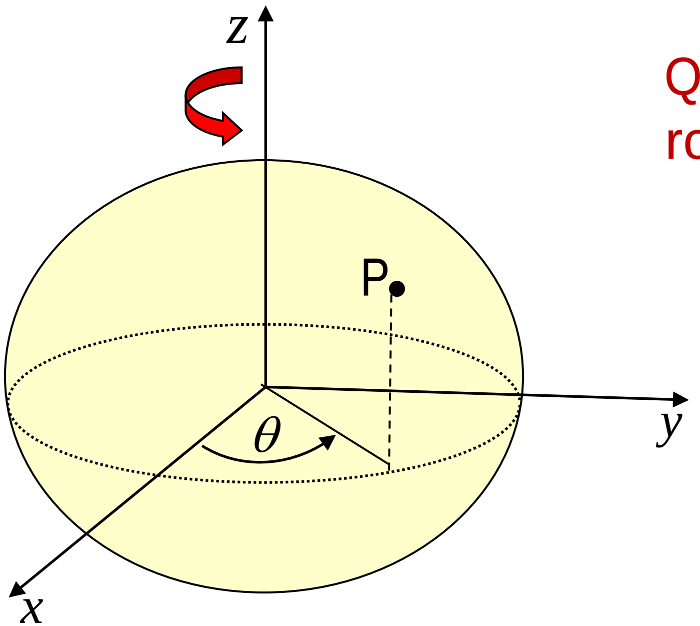
um sistema de partículas especial, cuja estrutura é rígida, isto é, cuja forma não muda, para o qual duas partes sempre estão igualmente distantes



Neste capítulo vamos analisar apenas o movimento de rotação do CR em torno de um eixo fixo.

9.1 – Velocidade angular e aceleração angular

Vamos considerar a rotação de um CR em torno do eixo *z*



Qual variável descreve o movimento de rotação?

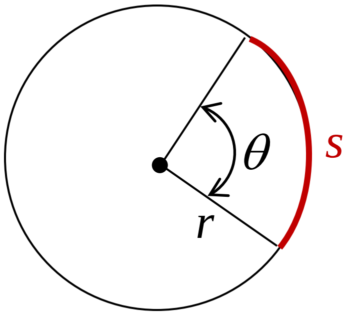
1. Escolhe-se um **ponto de referência** arbitrário (P) no CR

2. A projeção da posição de P no plano *xy* faz um ângulo θ com o eixo *x*

3. A coordenada angular θ (medida em radianos) descreve completamente a orientação do CR

Lembrando do ângulo em radianos (rad):

$$\theta = \frac{s}{r}$$



Velocidade angular média: se o CR gira de θ_1 a θ_2 entre os instantes t_1 e t_2, então

$$\omega_{mz} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

(o índice z indica rotação em torno do eixo z)

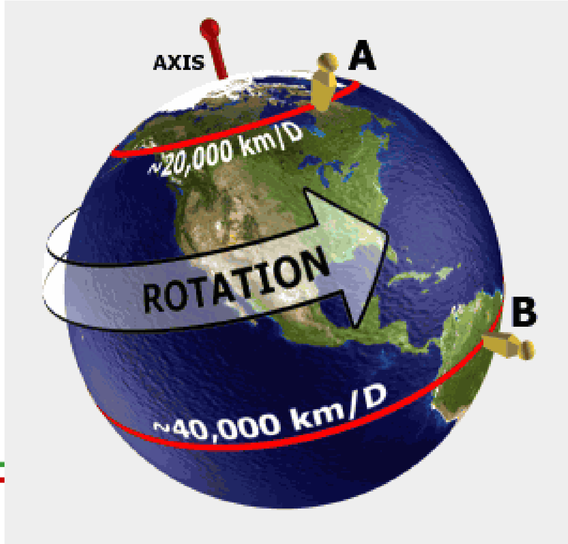
Velocidade angular instantânea:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Note a analogia com a cinemática em 1D:

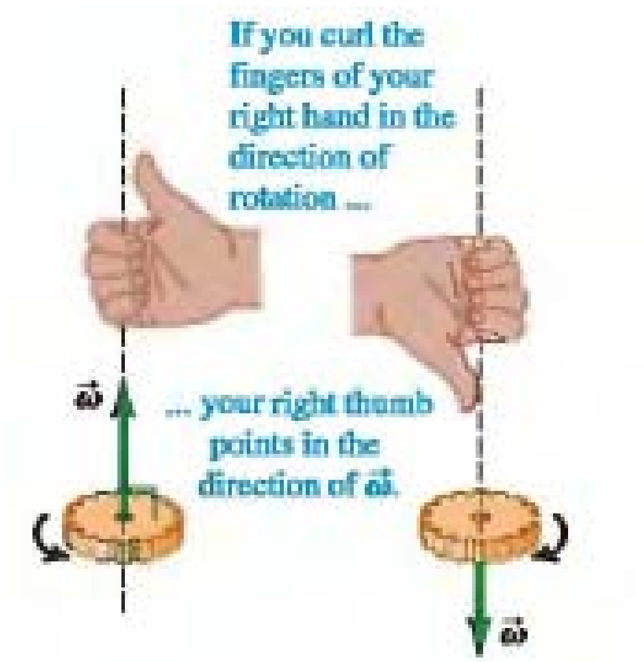
$$\boxed{\begin{array}{l} x \leftrightarrow \theta \\ v_x \leftrightarrow \omega_z \end{array}}$$

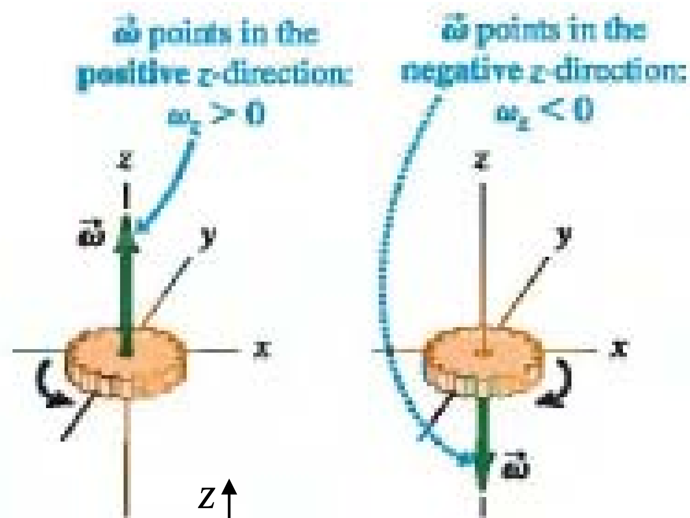
Note que todos os pontos do CR têm a mesma velocidade angular, mas podem ter diferentes velocidades escalares. Exemplo: rotação da Terra



A e B têm a mesma velocidade angular, mas têm velocidades escalares diferentes

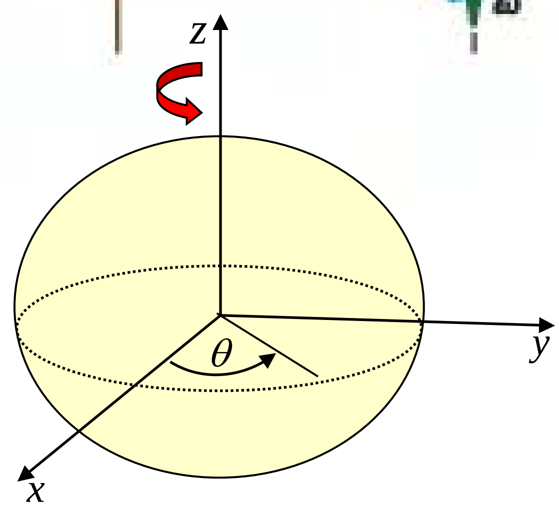
Velocidade angular como vetor: direção ao longo do eixo de rotação e sentido dado pela regra da mão direita





Note que esta convenção é consistente com o sinal da derivada:

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt}$$

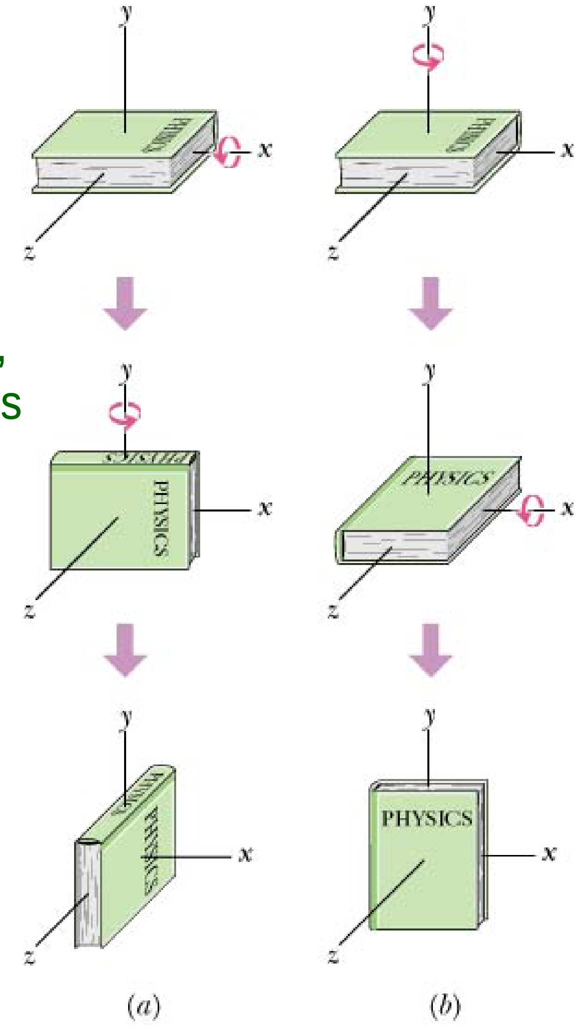


Mas e a coordenada angular θ, é também um vetor?

Não podemos associar um vetor ao deslocamento angular, pois vetores devem obedecer às regras da soma vetorial, o que não acontece neste caso.

Por exemplo, a soma vetorial é comutativa ($\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$), mas duas rotações sucessivas feitas em ordens diferentes dão resultados diferentes!

$$\Delta\theta_1\hat{x}+\Delta\theta_2\hat{y} \neq \Delta\theta_2\hat{y}+\Delta\theta_1\hat{x}$$



(a menos que os ângulos de rotação sejam infinitesimais)

Aceleração angular média: se a velocidade angular varia de ω_{1z} a ω_{2z} entre os instantes t_1 e t_2, então

$$\alpha_{mz} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

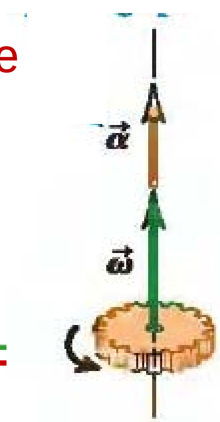
Aceleração angular instantânea: $\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}$

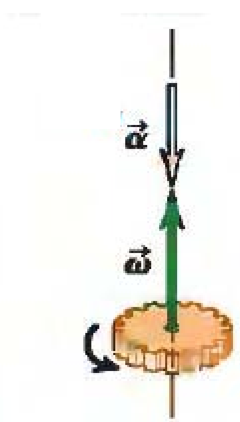
Continuando a analogia com a cinemática em 1D:

$$x \leftrightarrow \theta$$
$$v_x \leftrightarrow \omega_z$$
$$a_x \leftrightarrow \alpha_z$$

Aceleração angular também é um vetor: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Aceleração e velocidade angulares no mesmo sentido: rotação acelerada





Aceleração e velocidade angulares em sentidos opostos: rotação retardada

9.2 – Rotação com aceleração angular constante

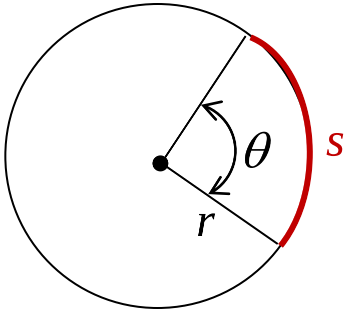
Usando a analogia com a cinemática em 1D, obtemos:

Movimento retilíneo com aceleração constante	**Rotação em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante**
$a_x = \text{constante}$	$\alpha_z = \text{constante}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \left(x - x_0\right)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z \left(\theta - \theta_0\right)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(v_x + v_{0x}\right)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\left(\omega_z + \omega_{0z}\right)t$

Exemplo: Y&F 9.3

9.3 – Relação entre cinemática linear e cinemática angular

Lembrando que: $\theta = \dfrac{s}{r} \Rightarrow s = \theta r$



Derivando: $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} r \Rightarrow \left|\dfrac{ds}{dt}\right| = \left|\dfrac{d\theta}{dt}\right| r \quad \Rightarrow \boxed{v = \omega r}$

Onde: $\left|\dfrac{ds}{dt}\right| = v$ (velocidade escalar)

$\left|\dfrac{d\theta}{dt}\right| = \omega$ (velocidade angular escalar)

Derivando mais uma vez: $v = \omega r \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \Rightarrow \boxed{a_{tg} = \alpha r}$

Onde: $$\frac{dv}{dt} = a_{tg} \text{ (componente tangencial da aceleracao)}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \text{ (taxa de variacao da velocidade angular escalar)}$$

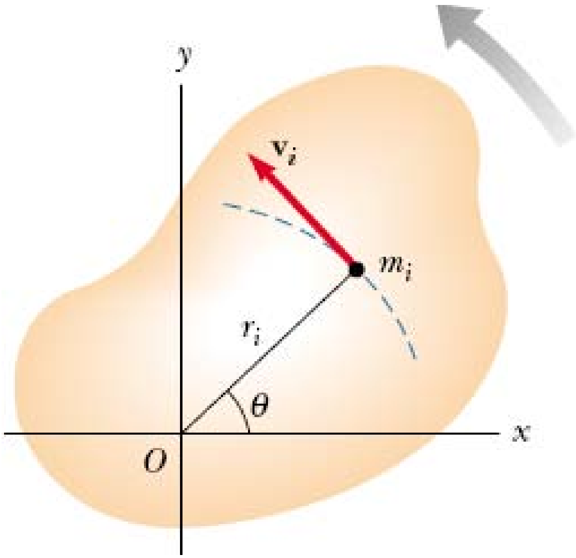
(Note que: $\alpha \neq \alpha_z, \quad \text{mas} \; |\alpha| = |\alpha_z|$)

Finalmente, lembramos que:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$ (aceleração centrípeta)

9.4 – Energia no movimento de rotação

Considere um CR em rotação com velocidade angular ω



A energia cinética do CR será a soma das energias cinéticas de todas as partículas que compõem o CR:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Sabemos que $v_i = \omega r_i$ (todas as partículas têm a mesma vel. ang.)

Assim: $$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Onde definimos o momento de inércia do CR em relação ao eixo de rotação:

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

Unidades S.I.: kg.m^2

Notem uma nova analogia entre o movimento linear de translação de uma partícula e a rotação de um CR em torno de um eixo fixo:

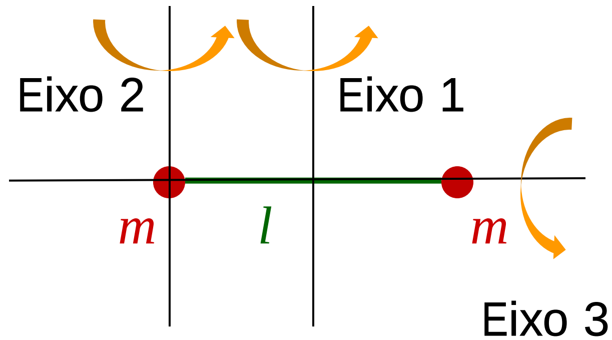
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(translação)}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(rotação)}$$

Momento de inércia:

- Define a inércia para o movimento de rotação (inércia rotacional)
- Não depende apenas da massa do CR, mas também de como ela está distribuída (dois objetos de mesma massa podem ter momentos de inércia diferentes)
- Não é uma propriedade intrínseca do CR, mas depende da escolha do eixo de rotação

Exemplo: sistema com 2 massas *m* de dimensões desprezíveis (partículas) unidas por uma haste fina de comprimento *l* e massa desprezível



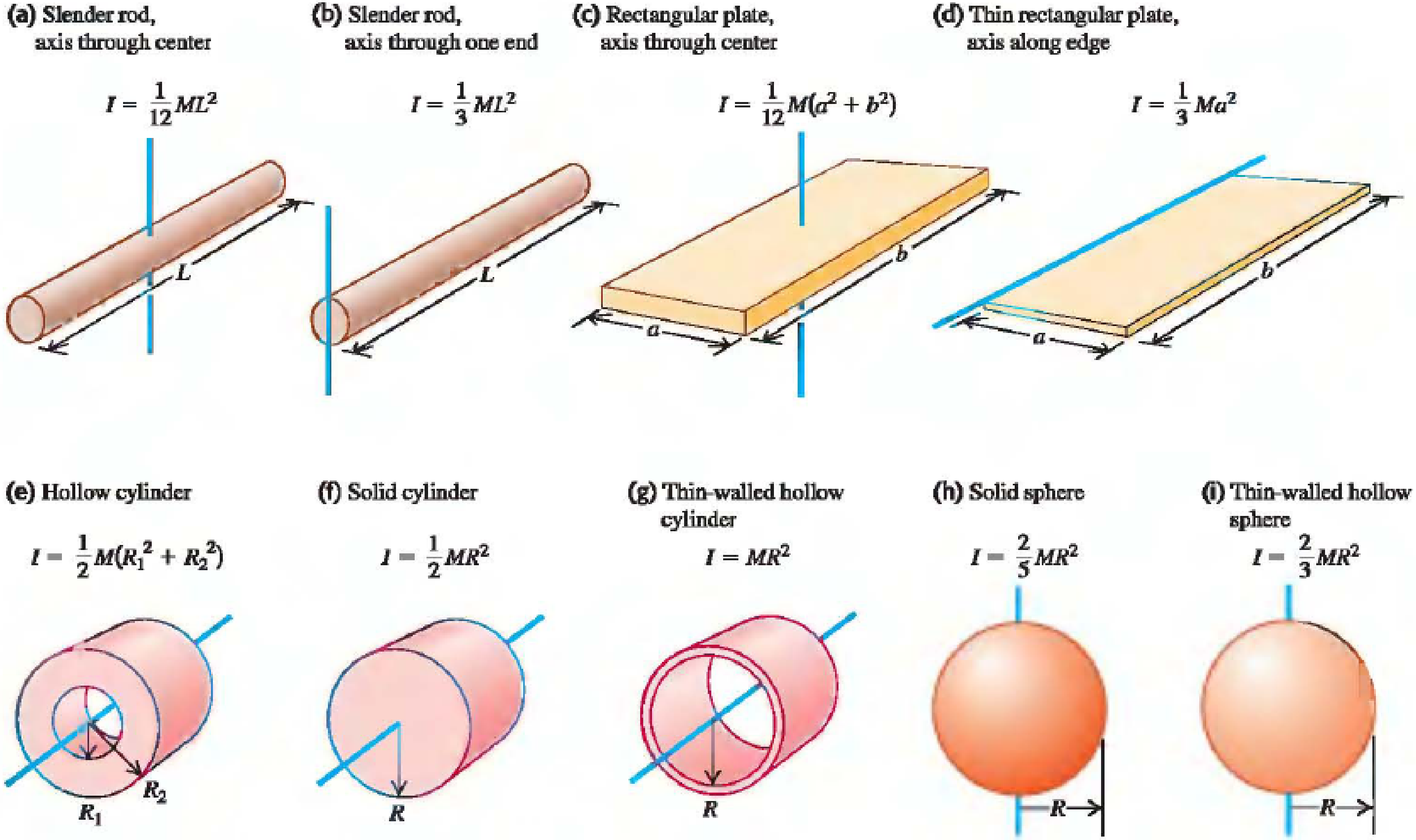
Eixo 1: $$I_1 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$$

Eixo 2: $$I_2 = m(0)^2 + m(l)^2 = ml^2$$

Eixo 3: $$I_3 = m(0)^2 + m(0)^2 = 0$$

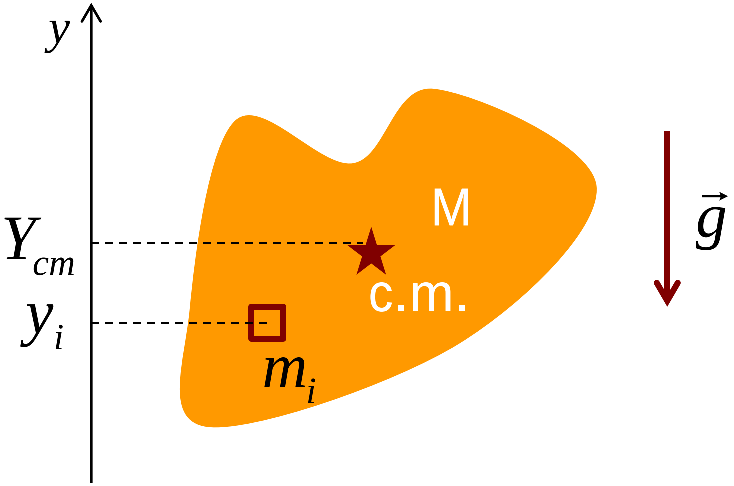
Momentos de inércia de distribuições contínuas de massa:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$



Exemplo: Y&F 9.9

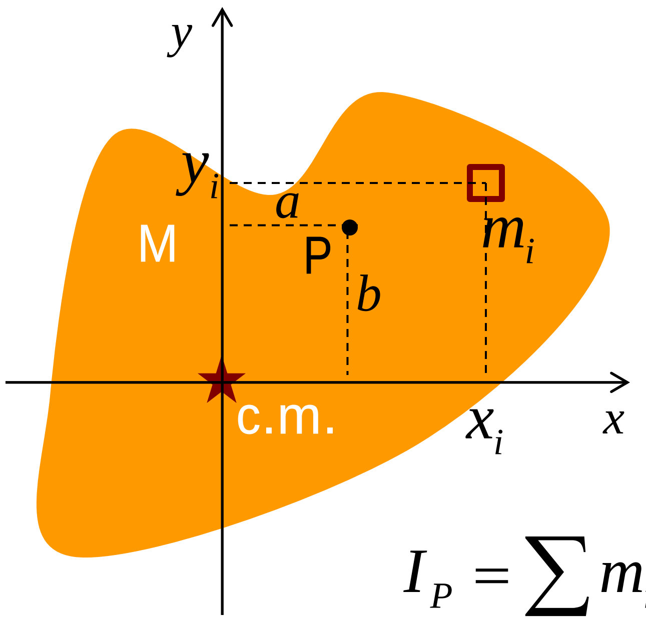
Energia potencial gravitacional para um corpo com massa distribuída:



$$U = \sum_i m_i g y_i = g \sum_i m_i y_i = gMY_{cm}$$

Como se toda a massa estivesse concentrada na posição do c.m.

9.5 – Teorema dos eixos paralelos



Vamos relacionar os momentos de inércia I_{cm} (em relação a um eixo que passa pelo c.m.) e I_P (em relação a um eixo que passa por um ponto P qualquer, paralelo ao eixo que passa pelo c.m.)

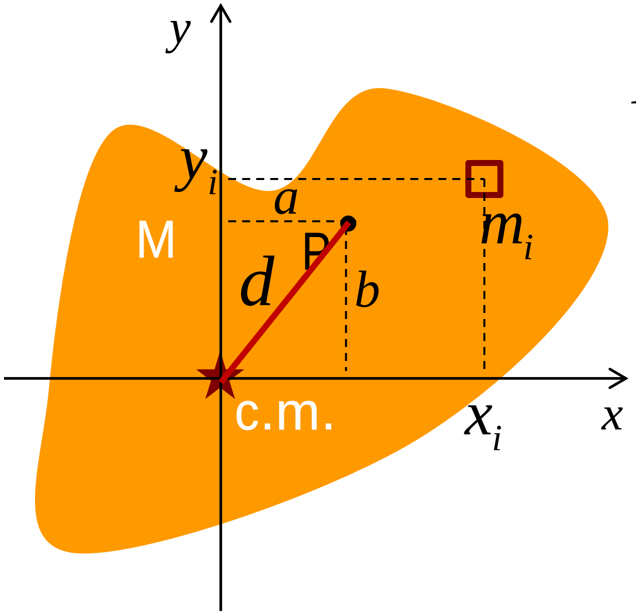
$$I_{cm} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$I_P = \sum_i m_i \left[\left(x_i - a\right)^2 + \left(y_i - b\right)^2\right]$$

$$I_P = \sum_i m_i \left(x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2\right)$$

$$I_P = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + \left(a^2 + b^2\right)\sum_i m_i$$

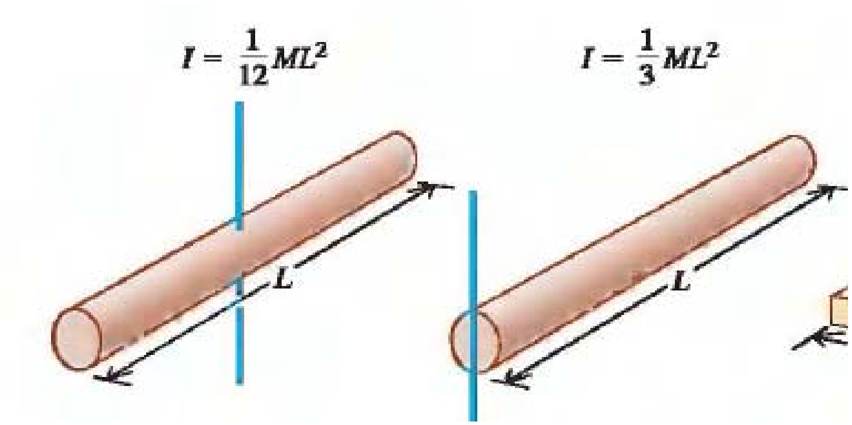
$$I_P = I_{cm} - 2aMX_{cm} - 2bMY_{cm} + M\left(a^2 + b^2\right)$$



$$I_P = I_{cm} - 2aM\underbrace{\cancel{X_{cm}}}_{0} - 2bM\underbrace{\cancel{Y_{cm}}}_{0} + M\left(a^2 + b^2\right)$$

$$\boxed{I_P = I_{cm} + Md^2}$$

Teorema dos eixos paralelos



Vamos verificar que funciona para uma haste fina:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I_{extremidade} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

Exercícios propostos
Física I – Mecânica
Sears-Zemansky & Young-Freedman
12a. Edição - Pearson - Addison-Wesley

Cap9:
1, 3, 9, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 29, 34, 35, 37, 39, 49, 51, 54, 57, 64, 66, 67, 70, 73, 75, 85, 86, 89, 91, 93, 94, 100

Próximas aulas:

4a. Feira 02/11: Não haverá aula

6a. Feira 04/11: Aula de Exercícios (sala A-327)

4a. Feira 09/11: Aula Magna (sala A-343)