Capítulo 3 – Movimento em Duas ou Três Dimensões

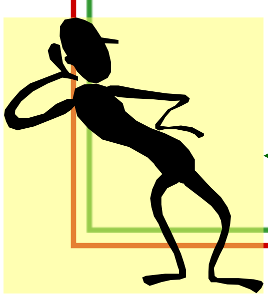
3.1 – Vetor posição e vetor velocidade

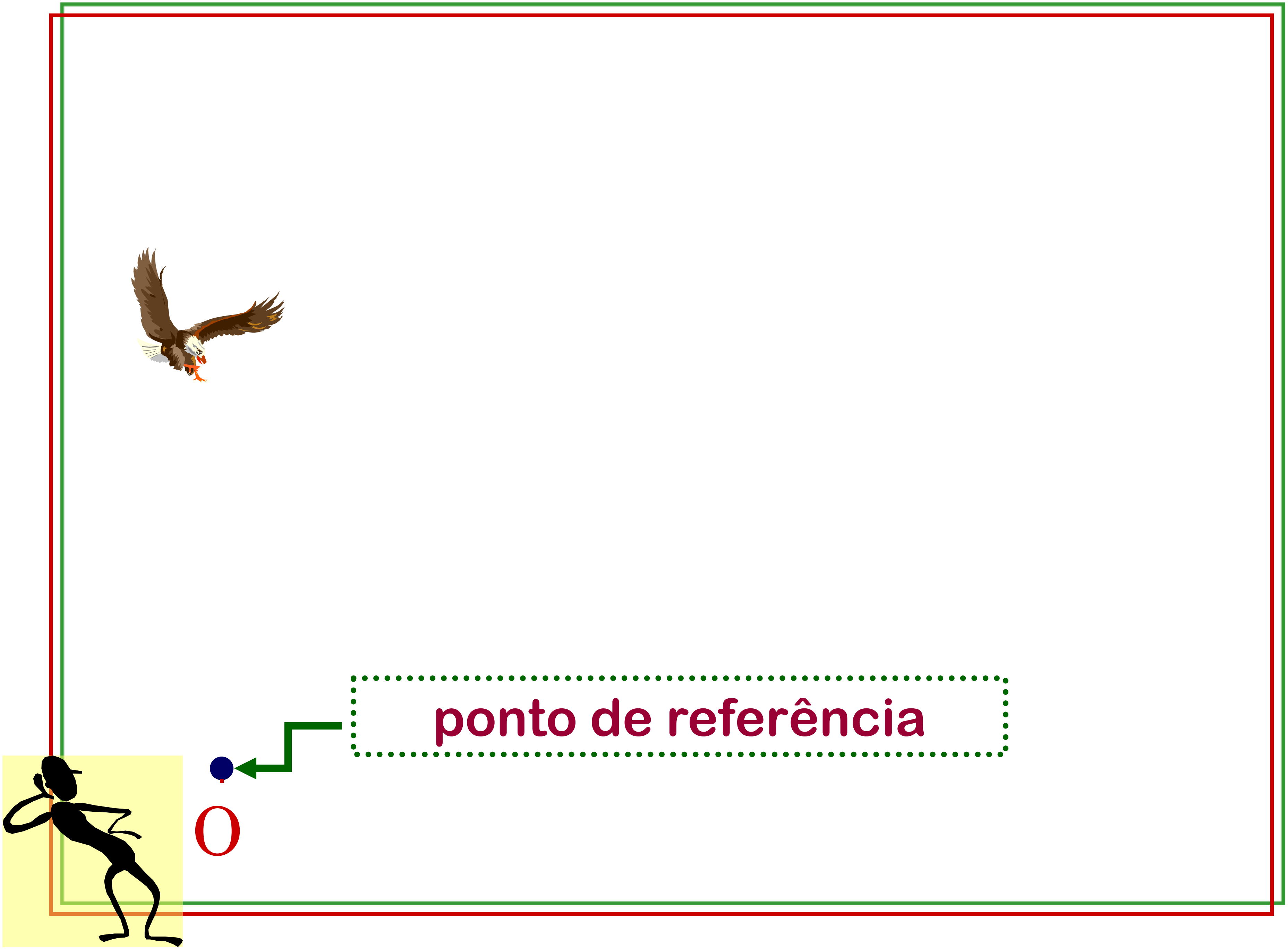
objeto de nosso estudo

sistema

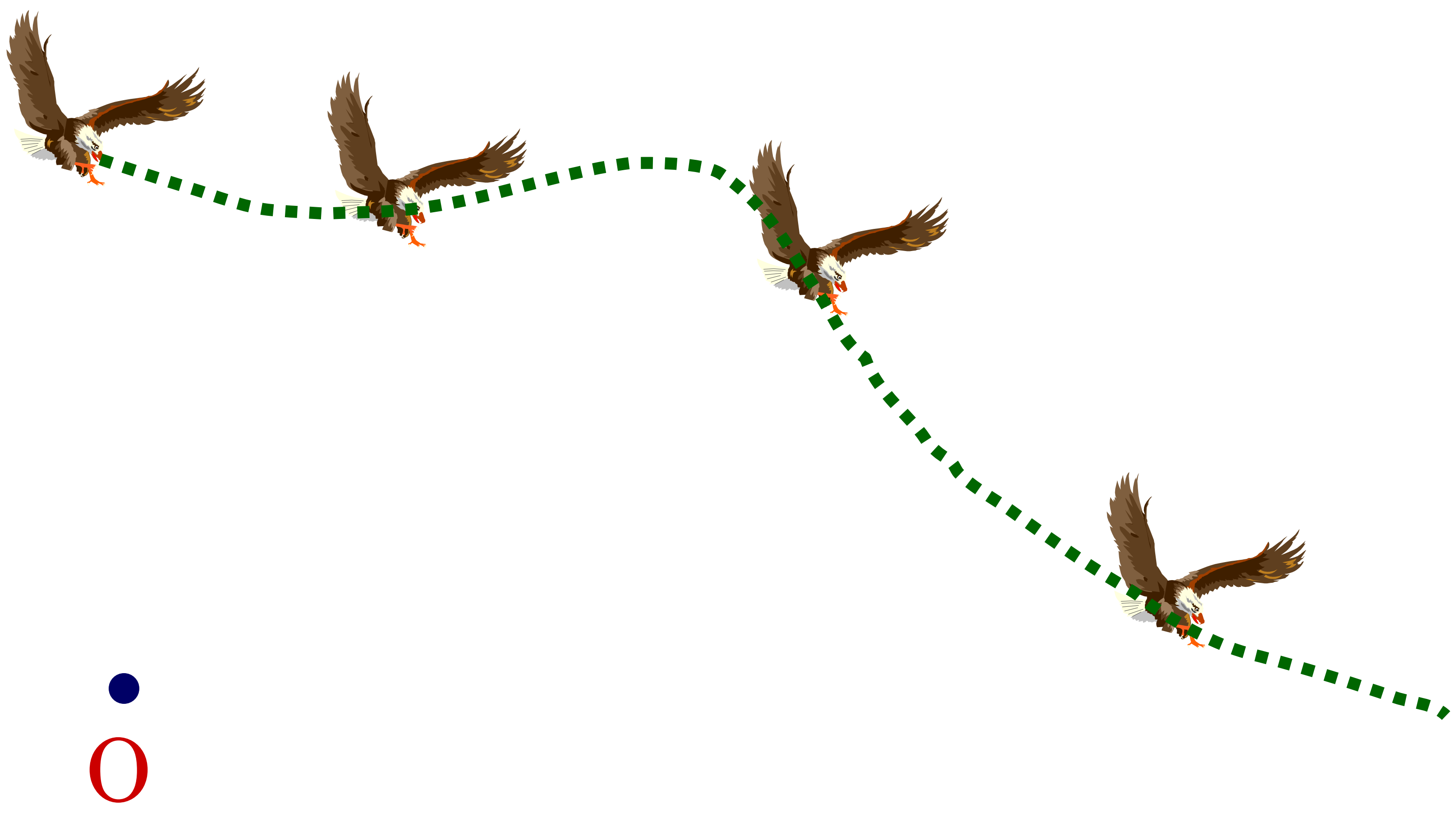
o observador

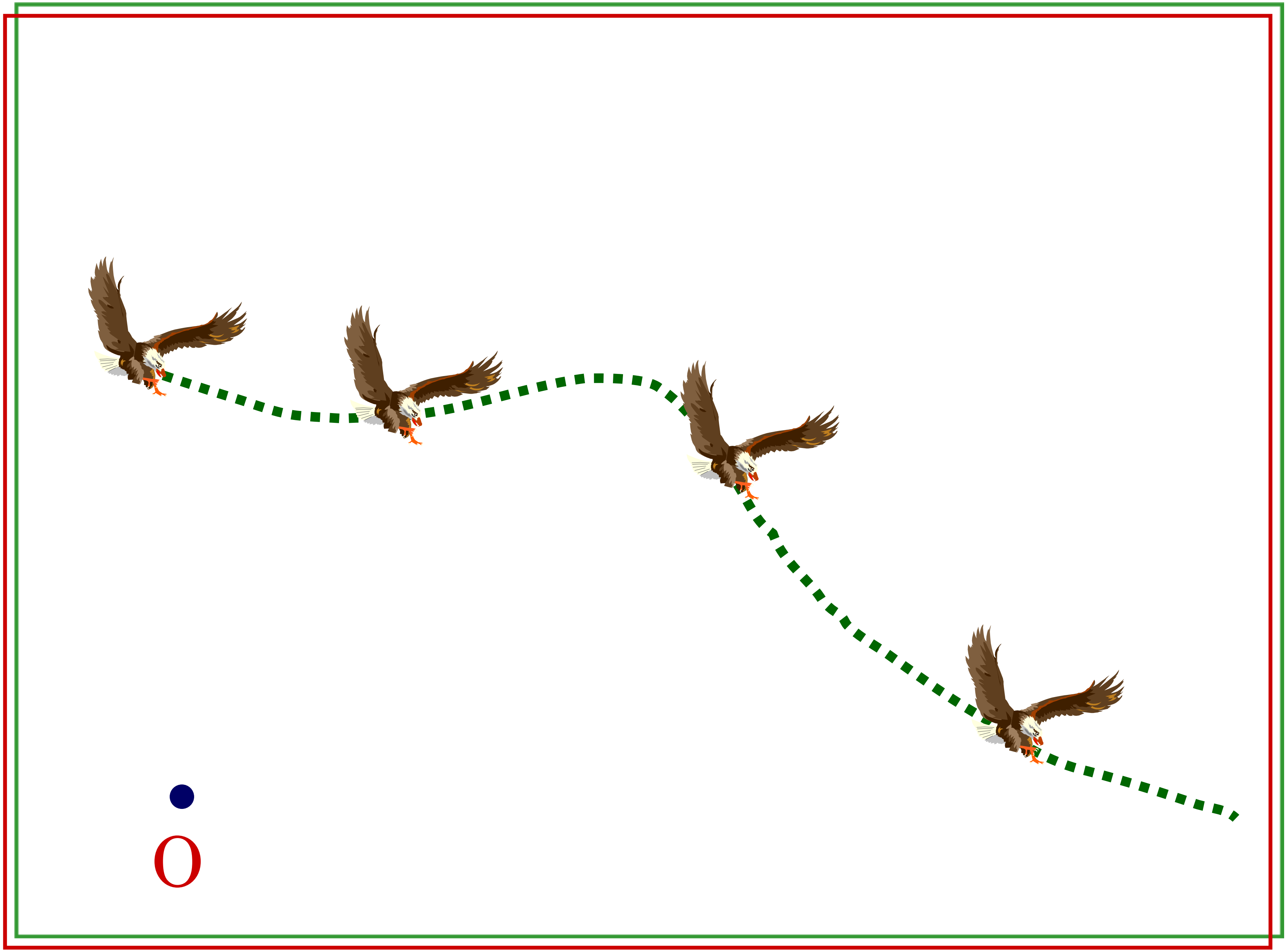
sistema de referência

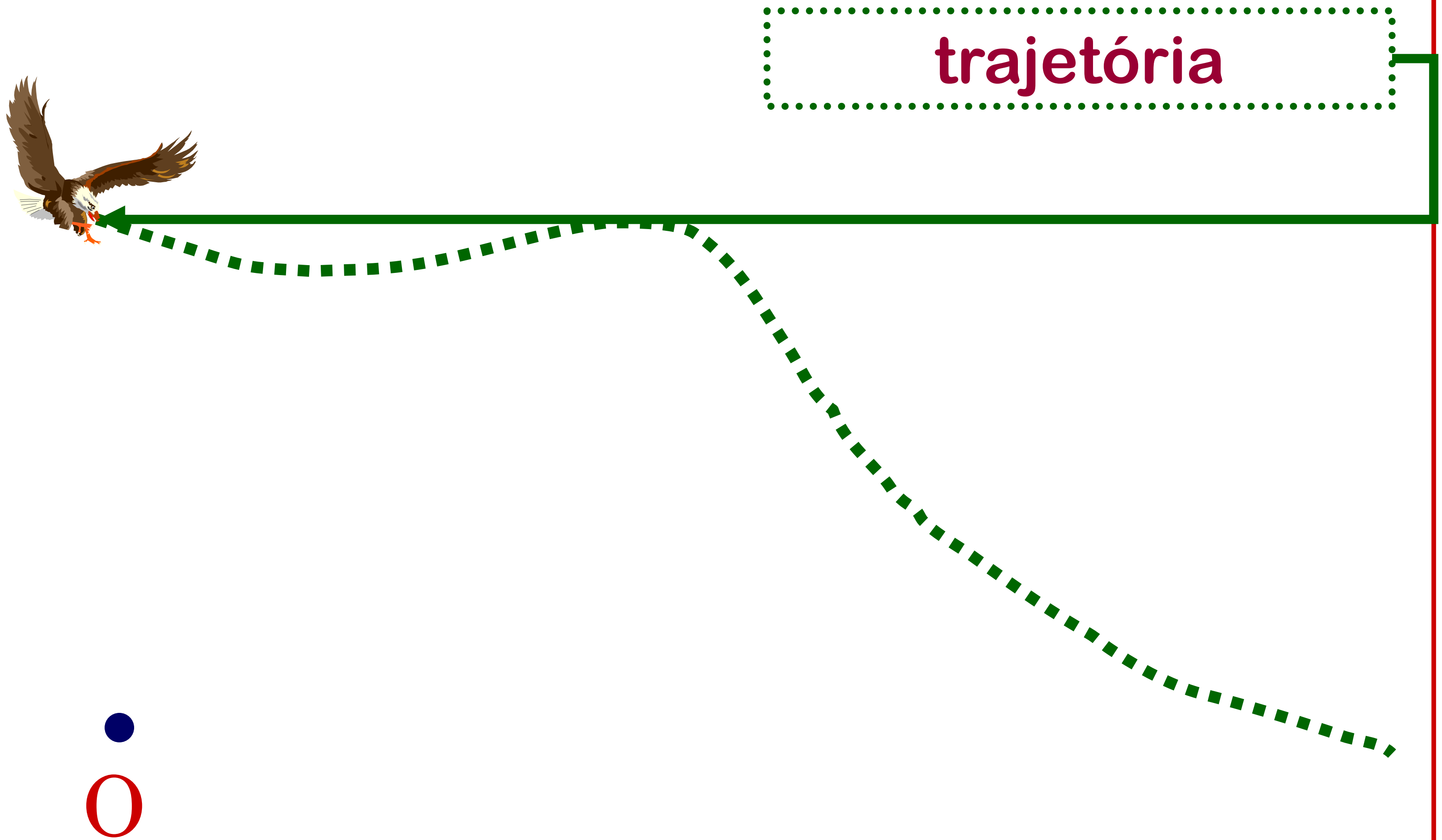



ponto de referência
O

O


O


O

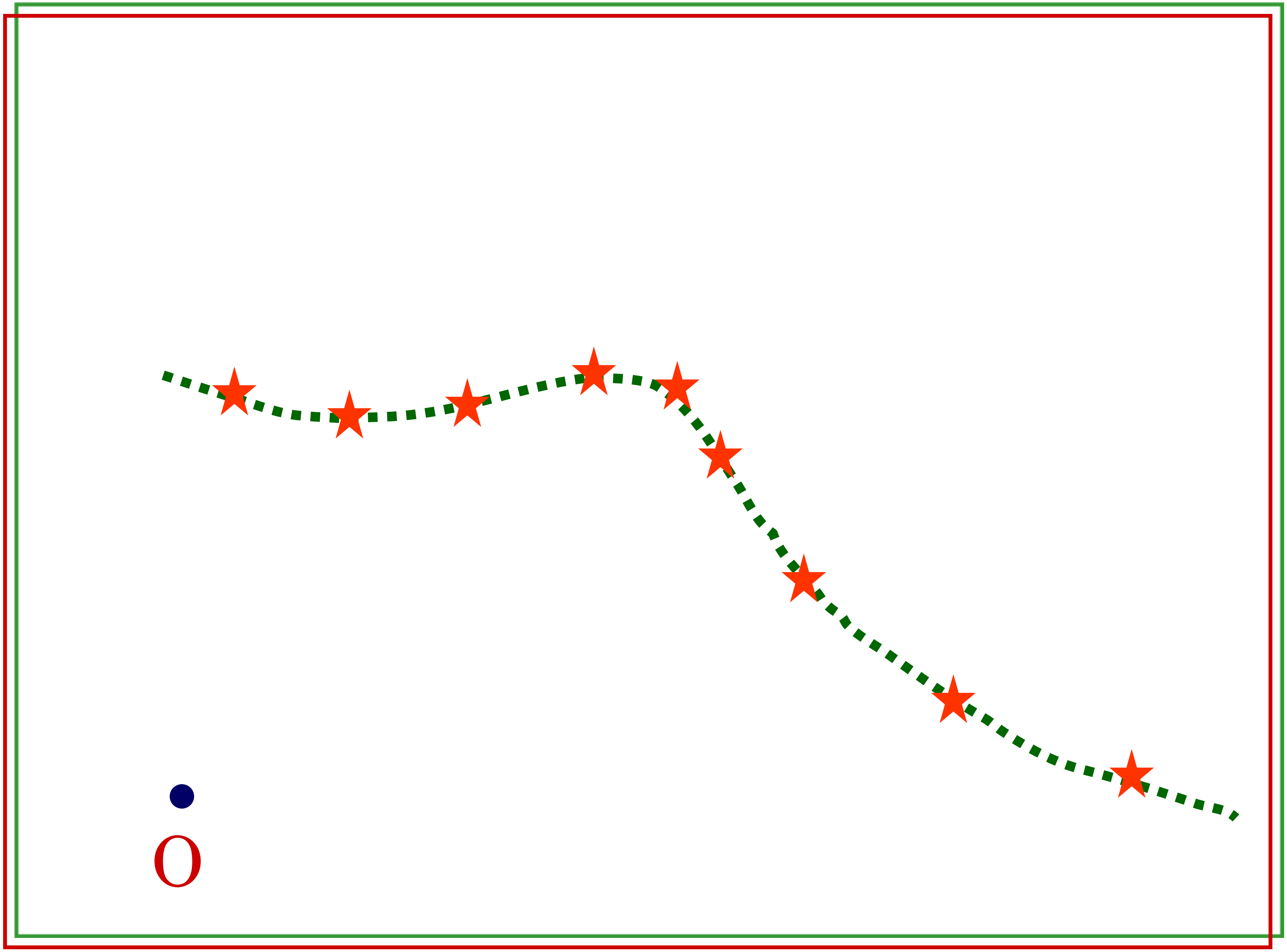

trajetória
O

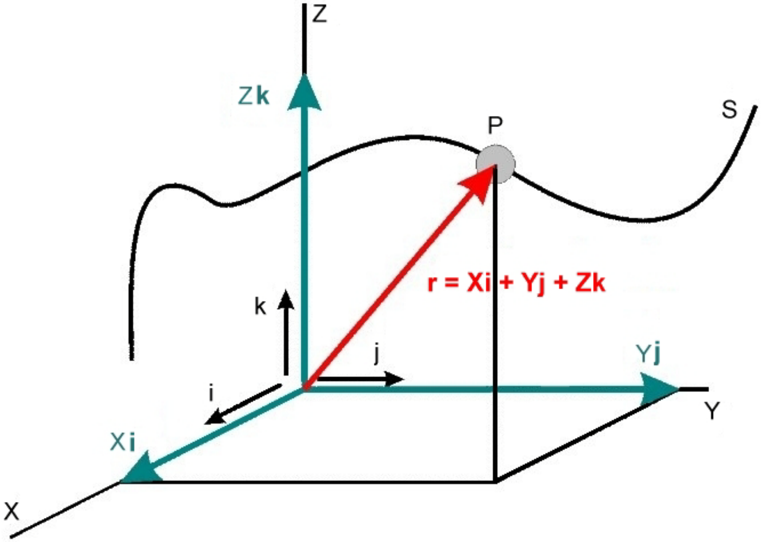
objeto de nosso estudo

sistema

modelo:

“partícula”


O

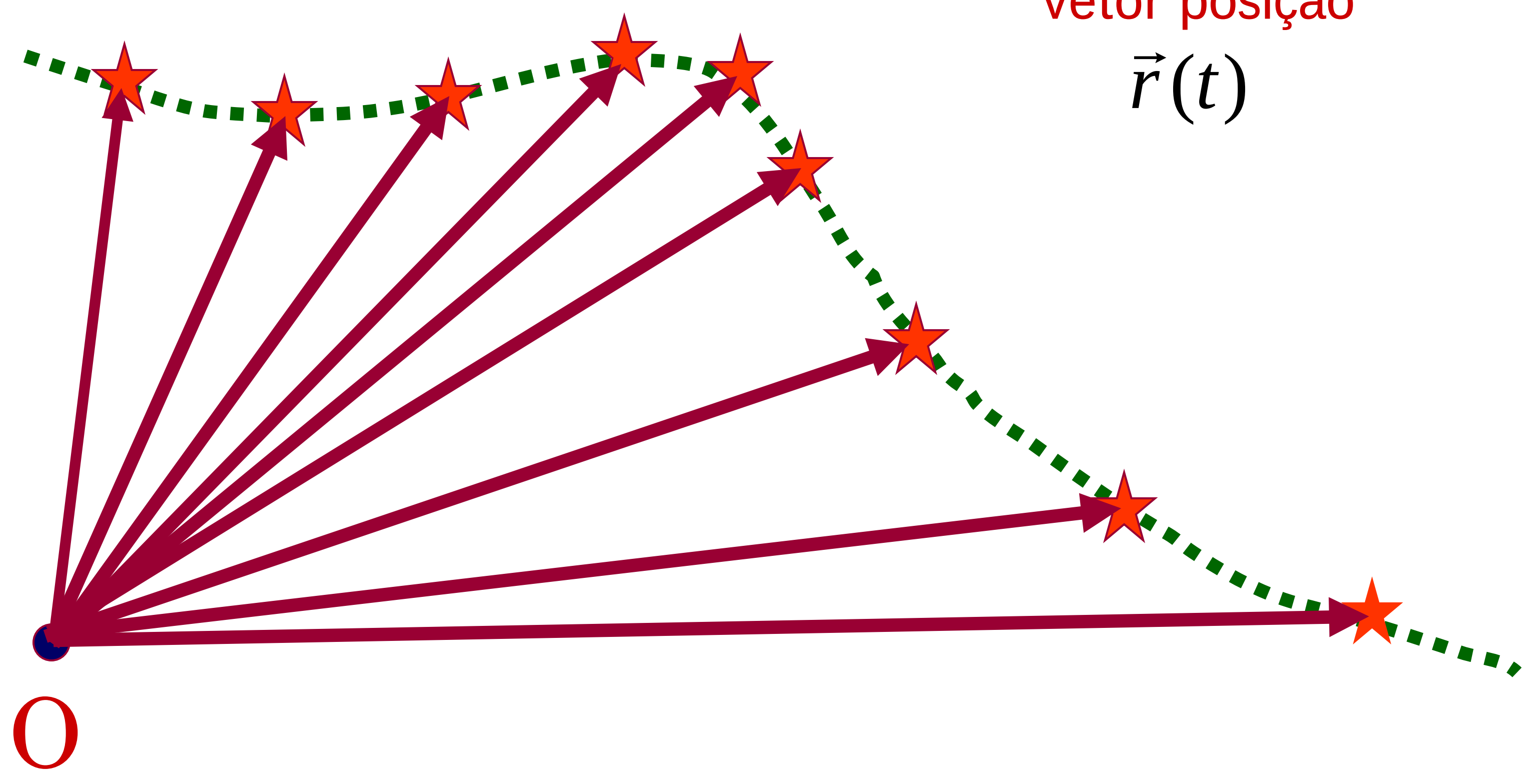


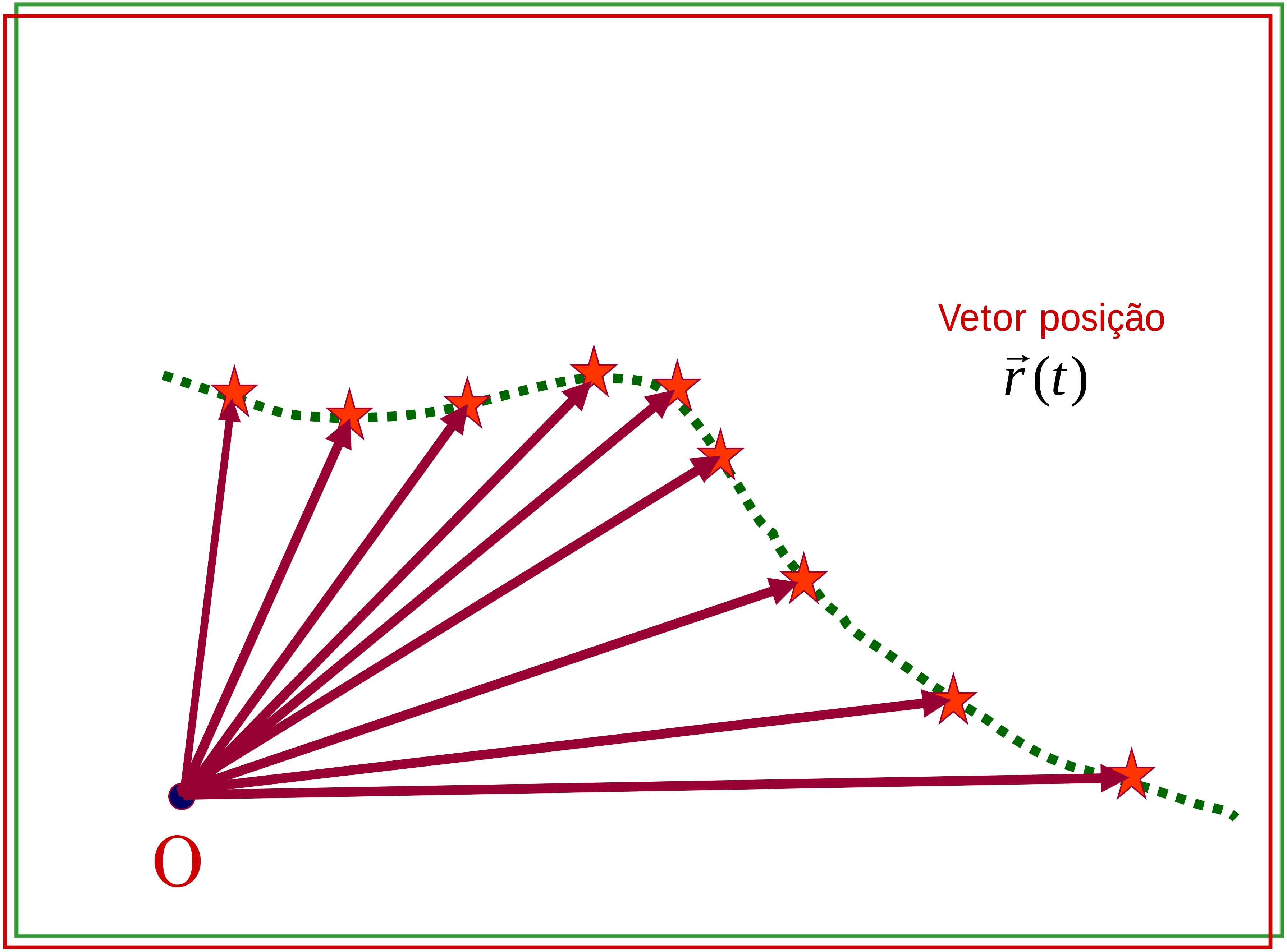
Coordenadas cartesianas:

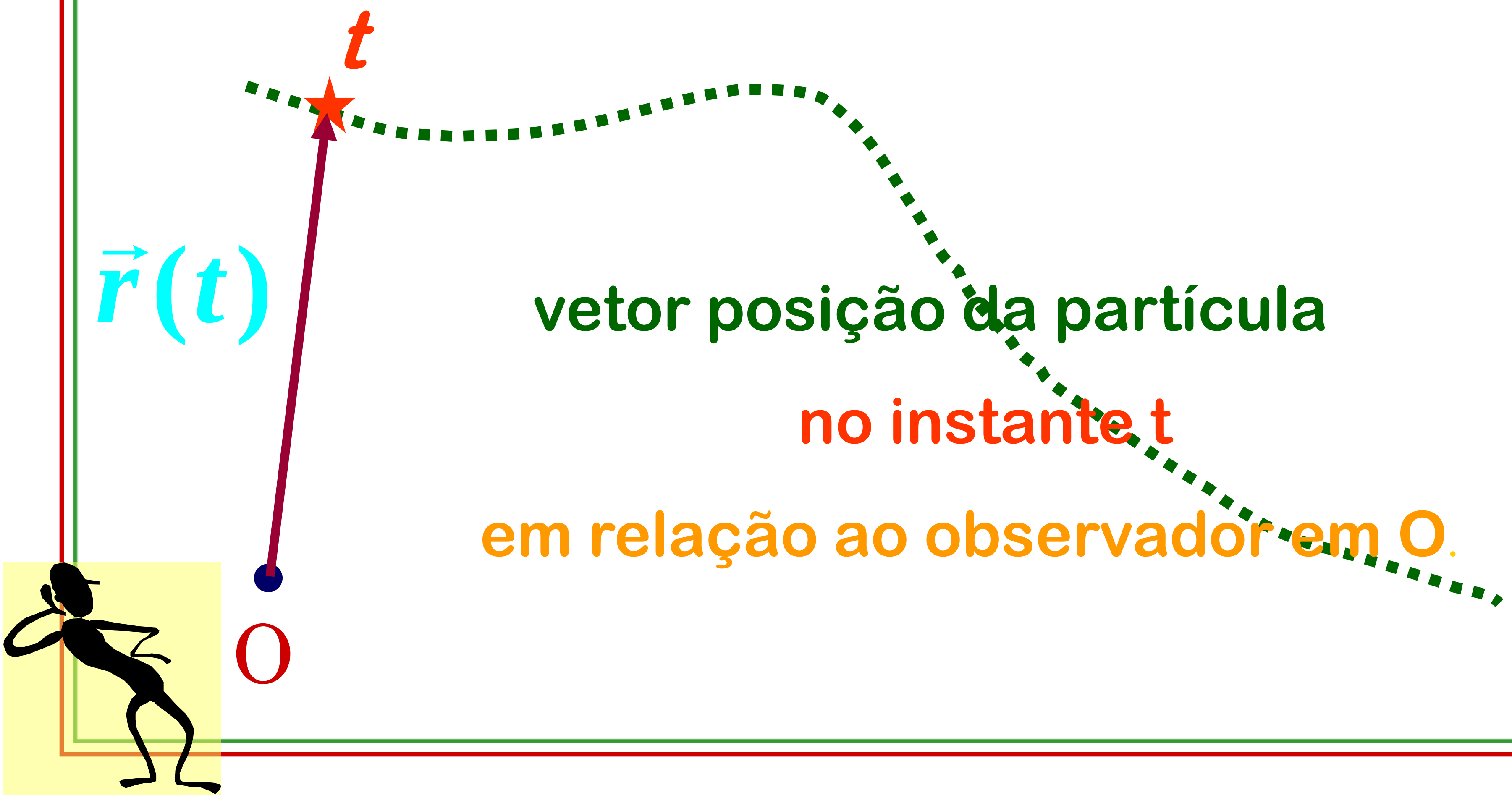
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Vetor posição

$$\vec{r}(t)$$




Vetor posição
$\vec{r}(t)$
O

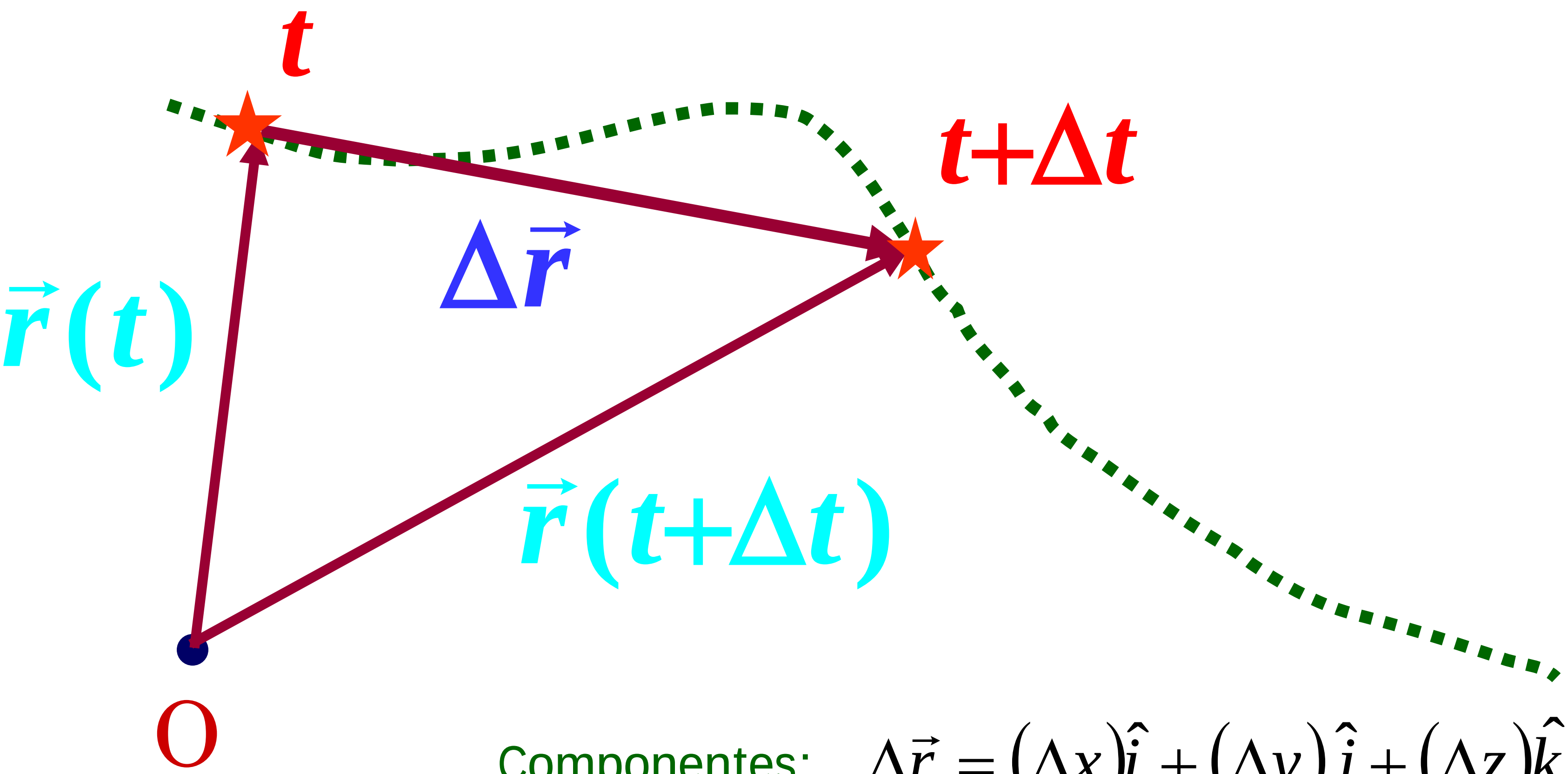


t
$\vec{r}(t)$
vetor posição da partícula
no instante t
em relação ao observador em O.
O

Vetor deslocamento

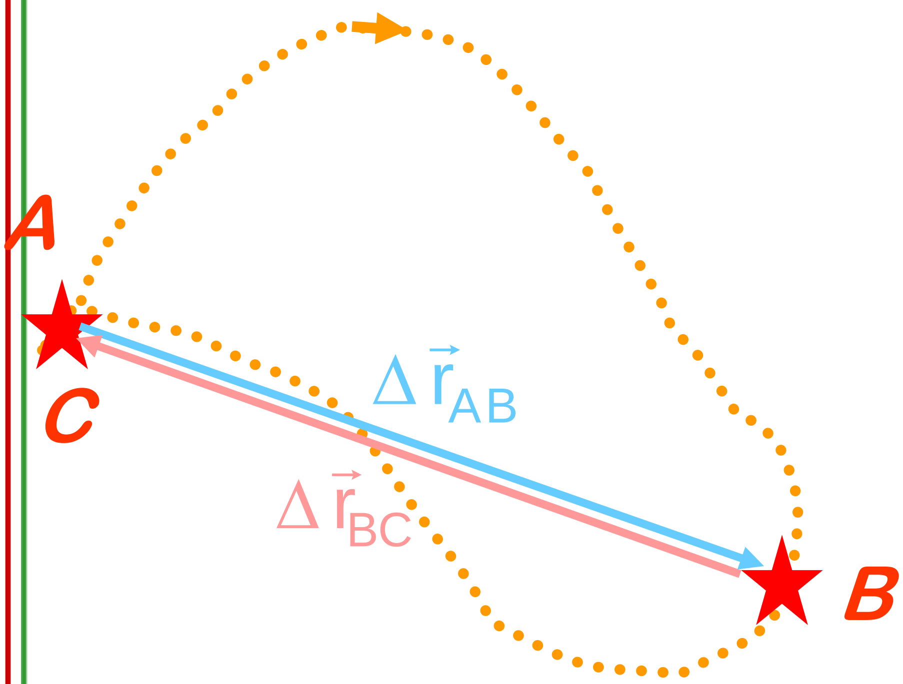
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Vetor deslocamento da partícula entre os instantes t e $t+\Delta t$



Componentes: $\Delta\vec{r} = (\Delta x)\hat{i} + (\Delta y)\hat{j} + (\Delta z)\hat{k}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t) =$$
$$= \vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}$$



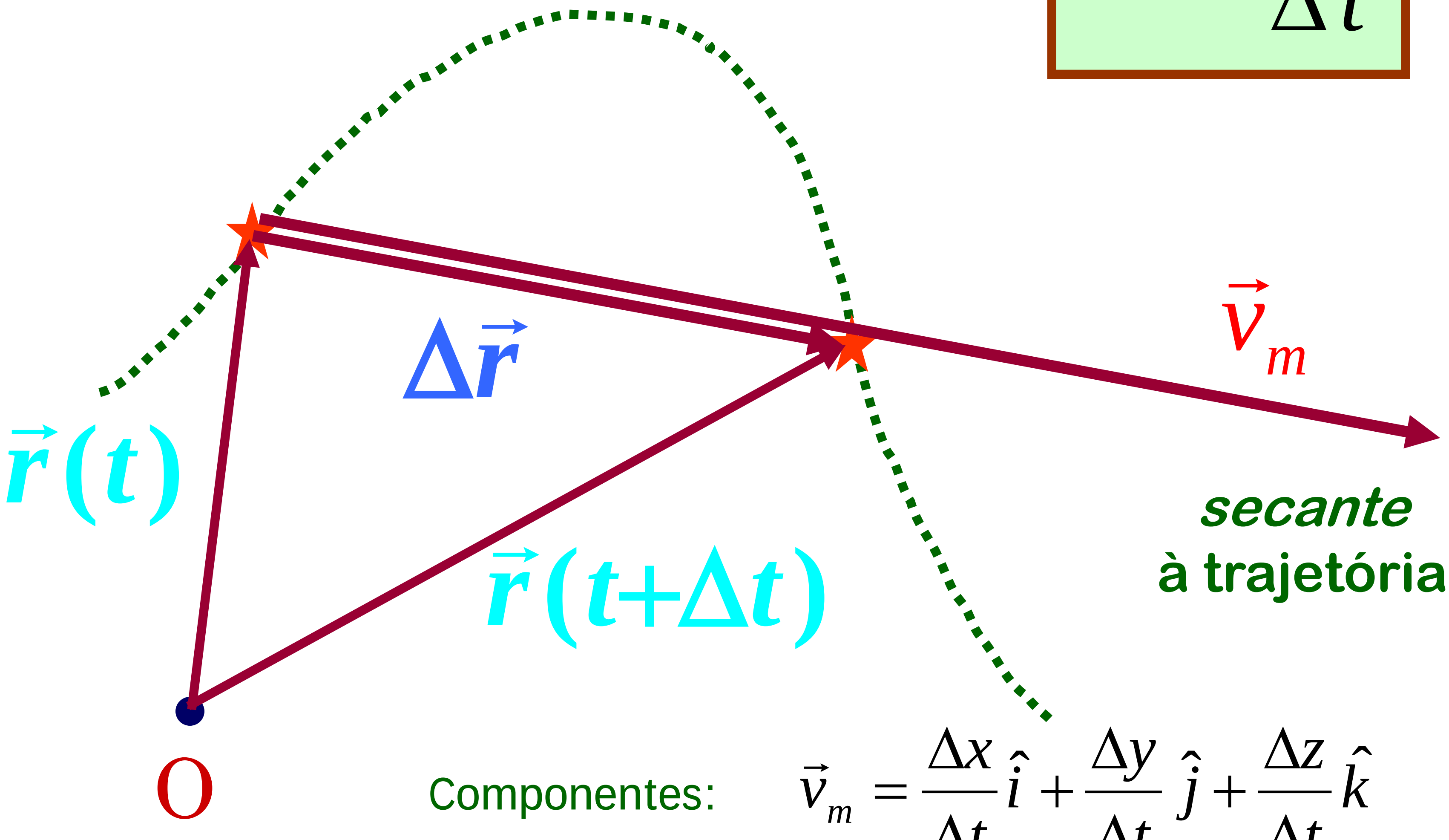
$$\boldsymbol{\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{B} - \vec{r}_{A}}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{r}_{BC} = \vec{r}_{C} - \vec{r}_{B}}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{C} - \vec{r}_{A} = 0}$$

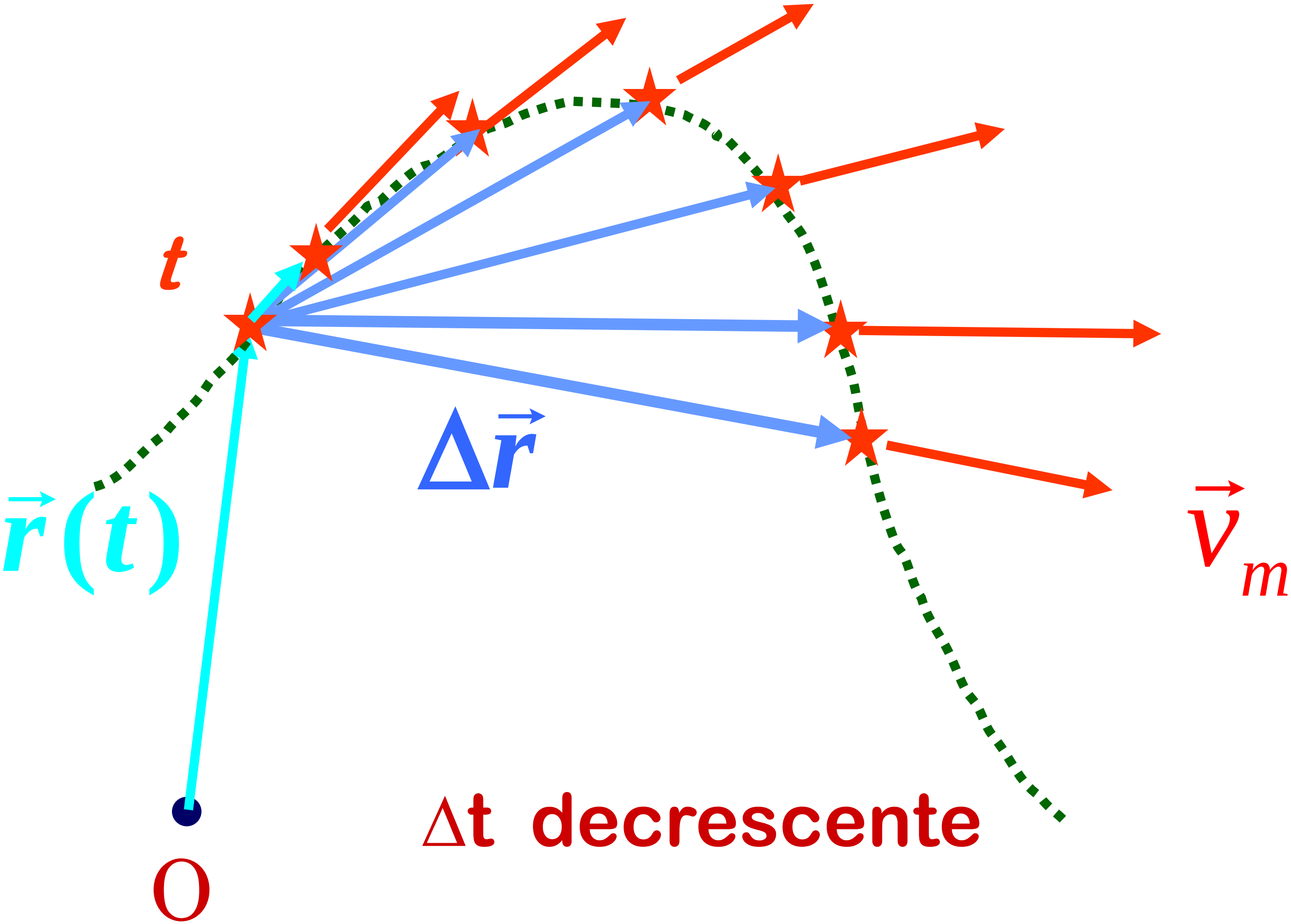
Velocidade média

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



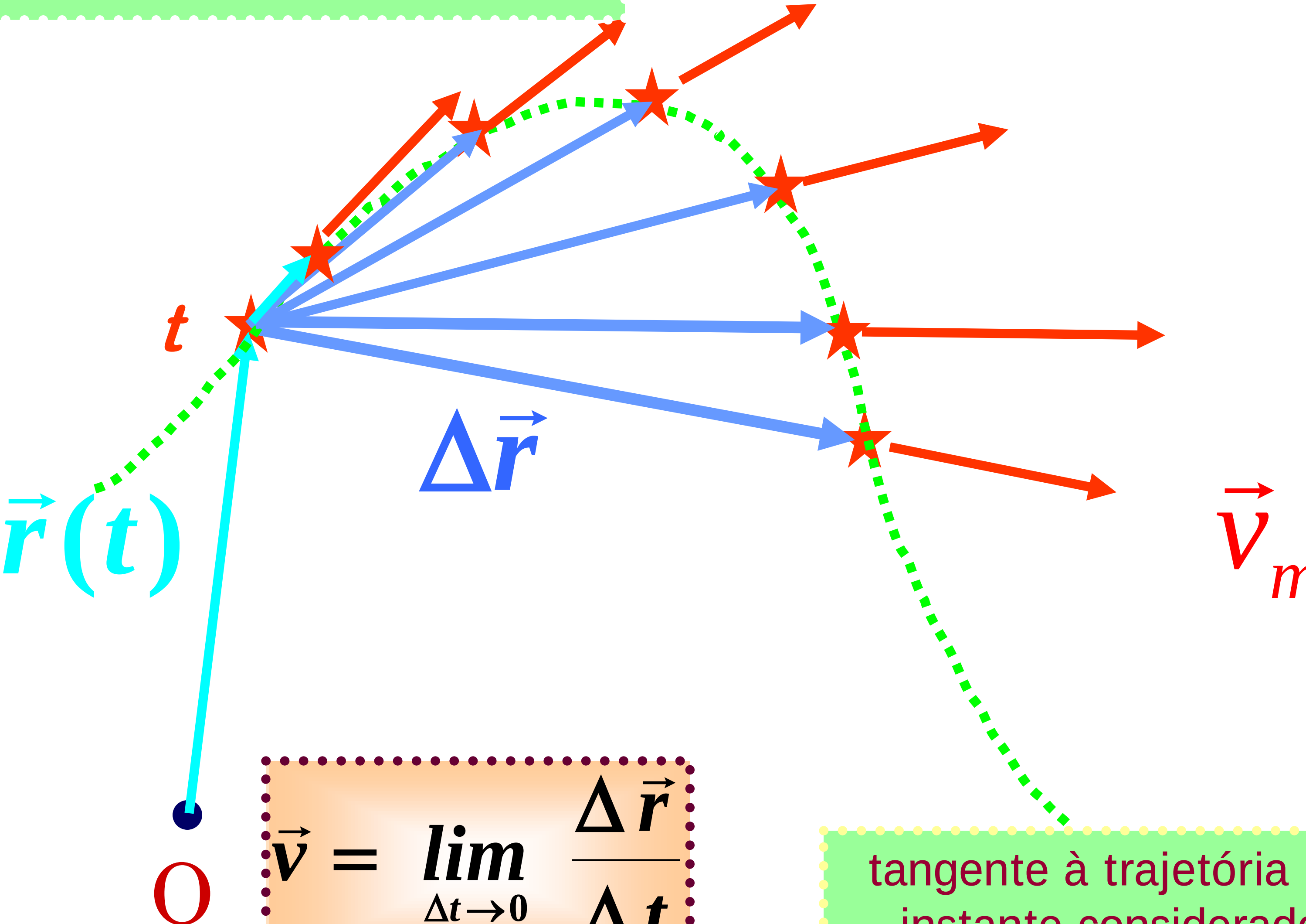
Componentes: $\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$

Velocidade instantânea



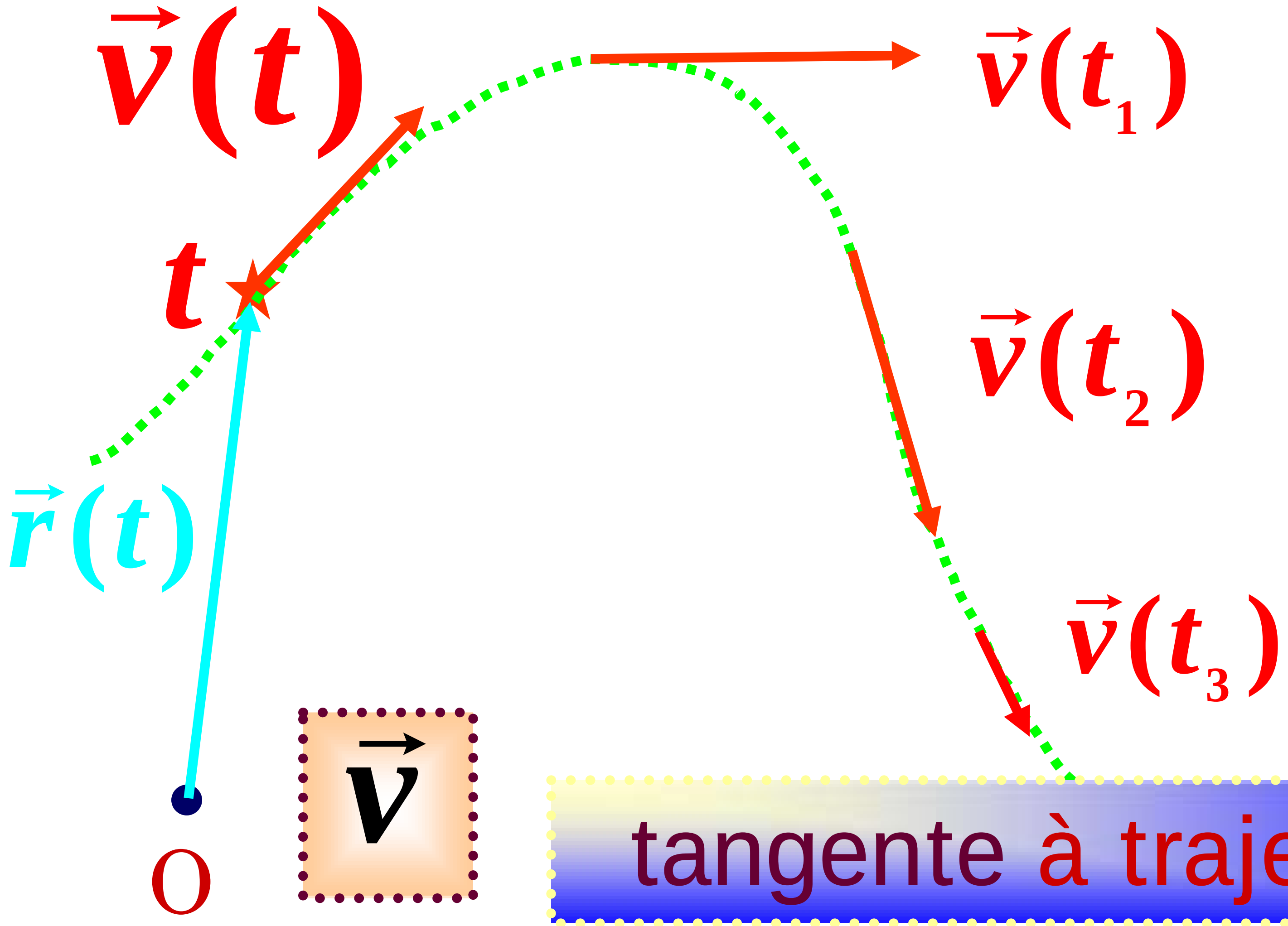
Δt decrescente

$|\Delta\vec{r}|$ decrescente



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

tangente à trajetória no instante considerado



tangente à trajetória

Em termos das componentes:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Módulo do vetor velocidade:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

(igual à velocidade escalar)

3.2 – Vetor aceleração

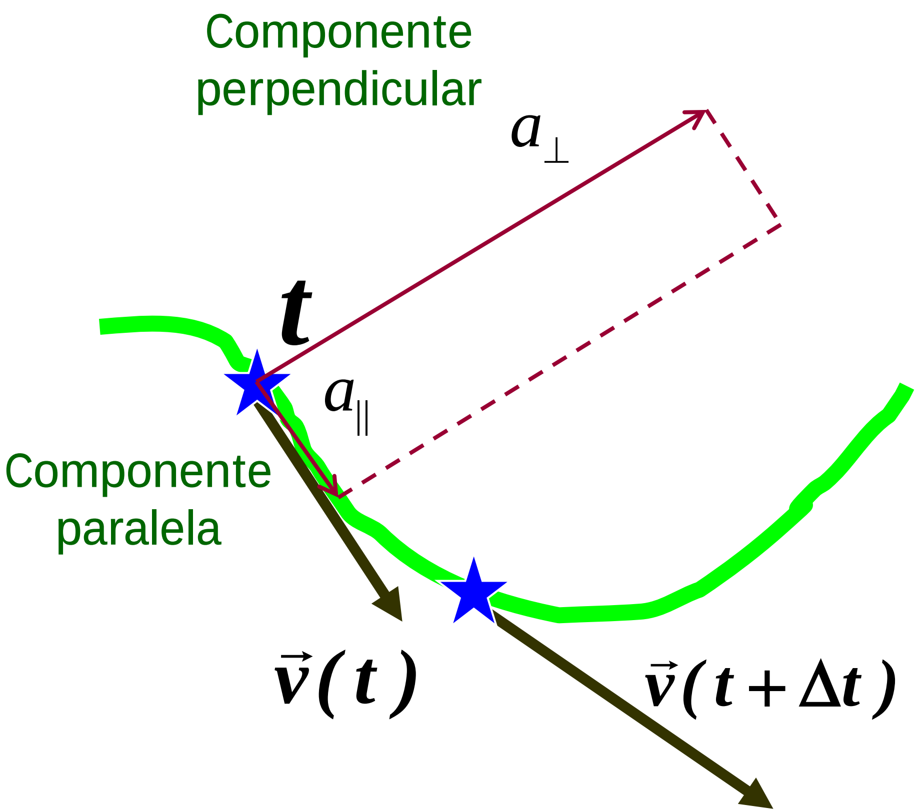
Aceleração média: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

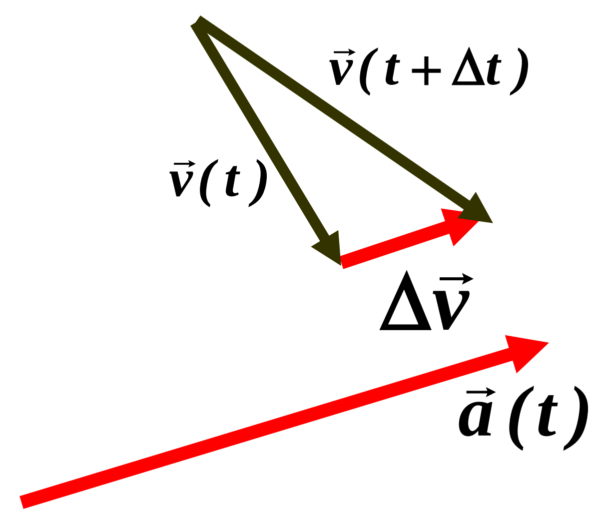
Aceleração instantânea: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Componentes: $\vec{a} = \dfrac{dv_x}{dt}\hat{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\hat{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\hat{k}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Componentes perpendicular e paralela da aceleração:



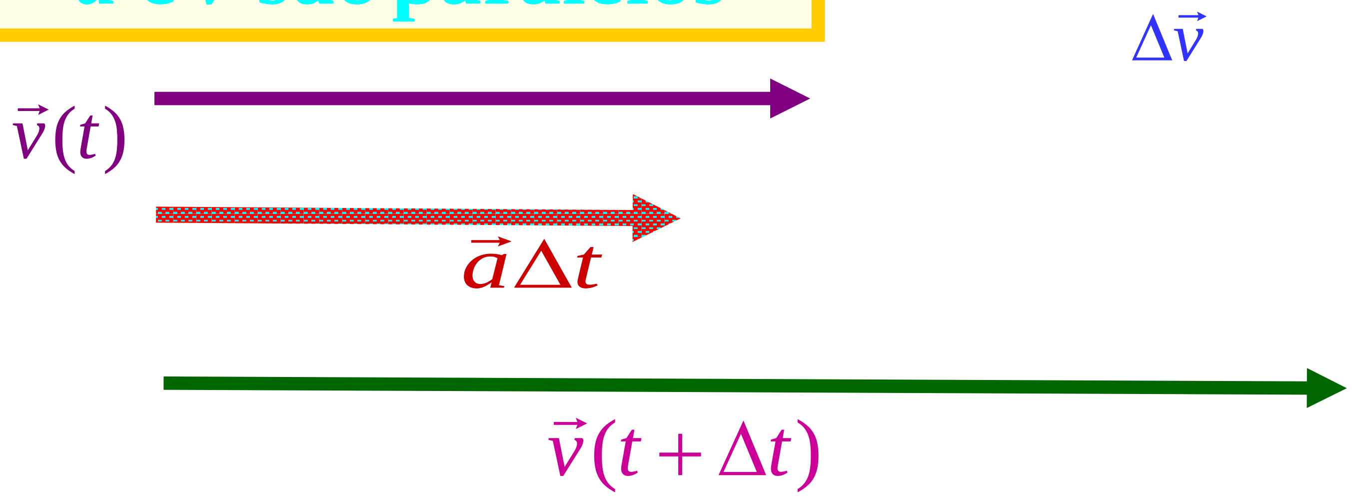


$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \cong \frac{\Delta \vec v}{\Delta t}$$

Componente paralela da aceleração altera o módulo da velocidade

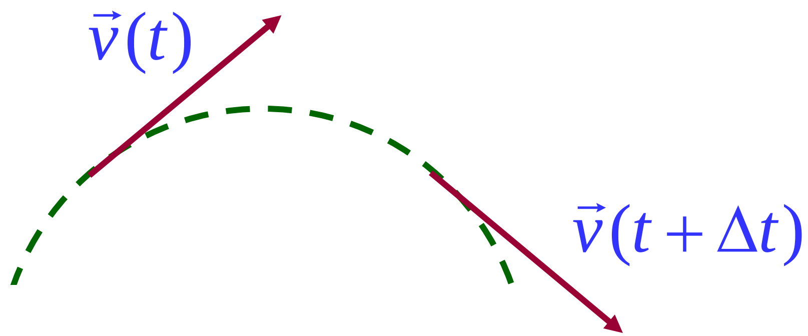
$$\boxed{\Delta\vec{v} \;\cong\; \vec{a}\,\Delta t}$$

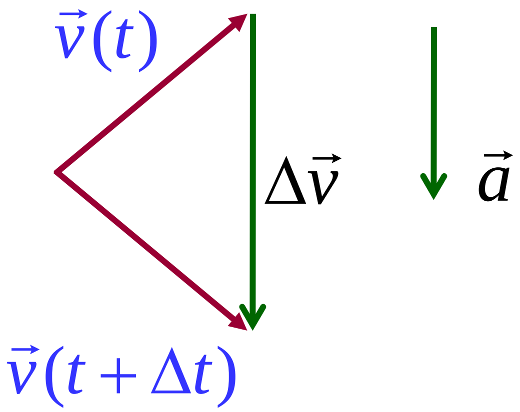
$\vec{a}$ e $\vec{v}$ são paralelos



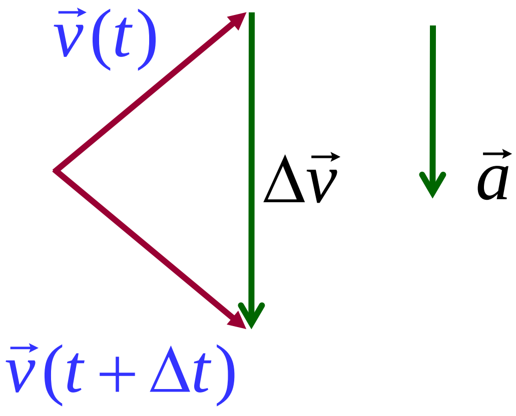
apenas o módulo da velocidade é alterado!

Componente perpendicular da aceleração altera a direção da velocidade

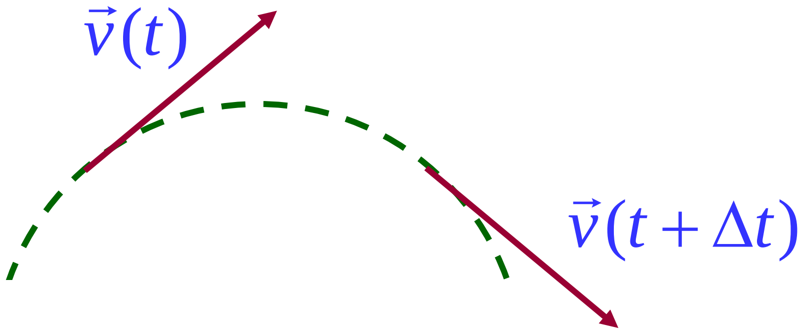


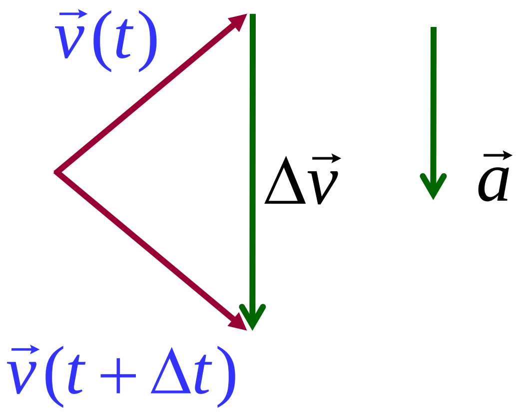


No limite $\Delta t \to 0$, a aceleração torna-se perpendicular à velocidade

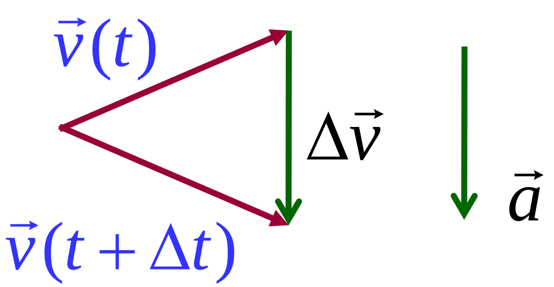


Componente perpendicular da aceleração altera a direção da velocidade

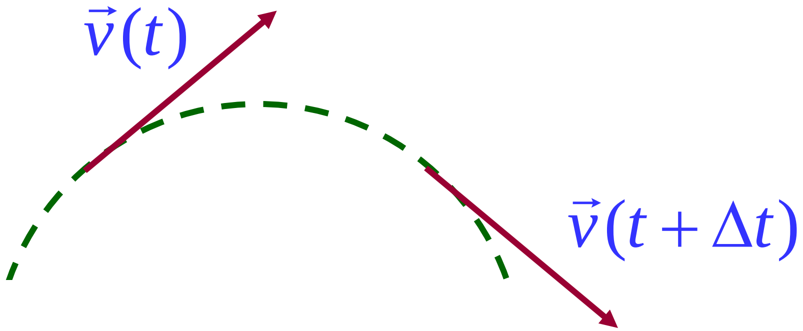


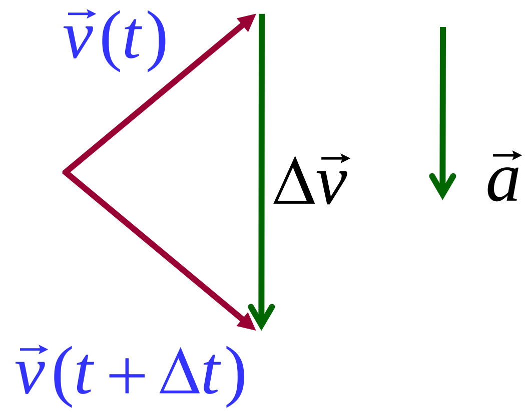


No limite $\Delta t \to 0$, a aceleração torna-se perpendicular à velocidade

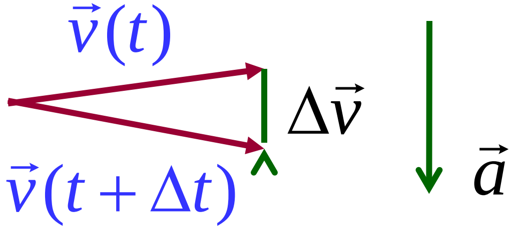


Componente perpendicular da aceleração altera a direção da velocidade

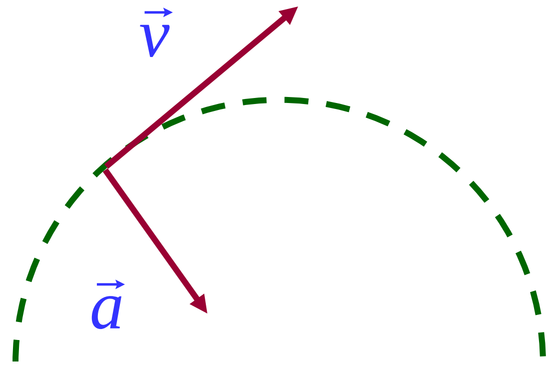




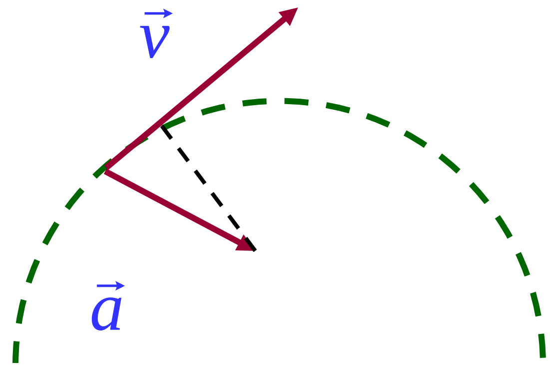
No limite $\Delta t \rightarrow 0$, a aceleração torna-se perpendicular à velocidade



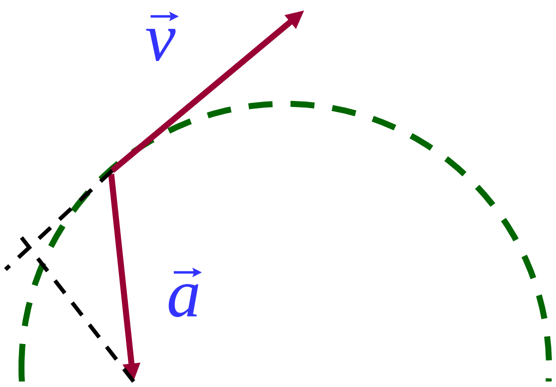
Exemplos



Aceleração normal à trajetória:
velocidade escalar é constante



Componente paralela da aceleração normal
no mesmo sentido da velocidade:
velocidade escalar aumenta

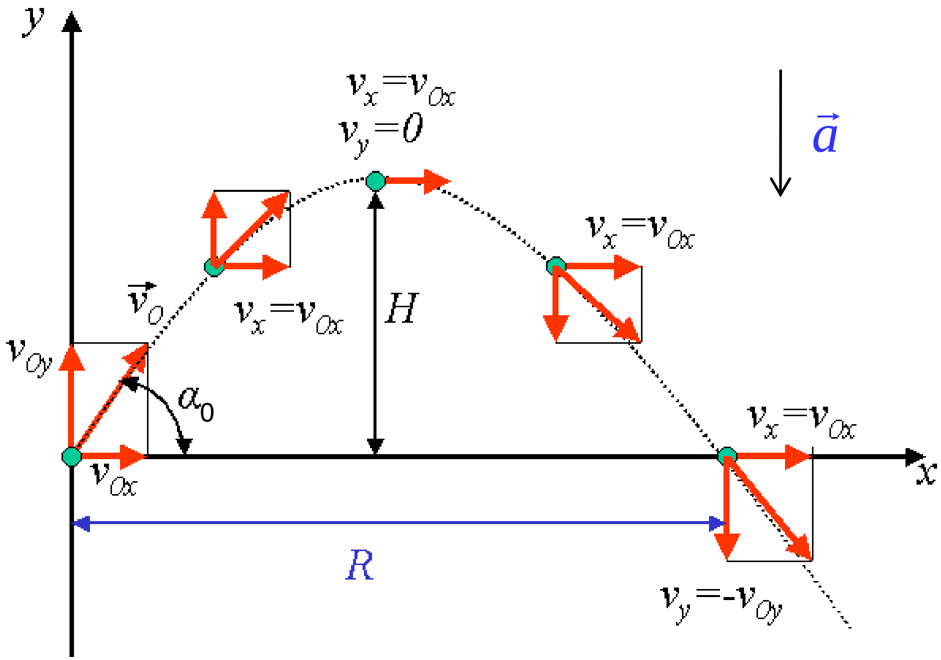


Componente paralela da aceleração normal
no sentido oposto da velocidade:
velocidade escalar diminui

3.3 – Movimento de um projétil

• Movimento de um corpo no campo gravitacional da Terra, desprezando os efeitos de resistência do ar, curvatura e rotação da Terra.

• Movimento ocorre em um plano, definido pelo vetor velocidade inicial e pela vetor aceleração da gravidade



$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

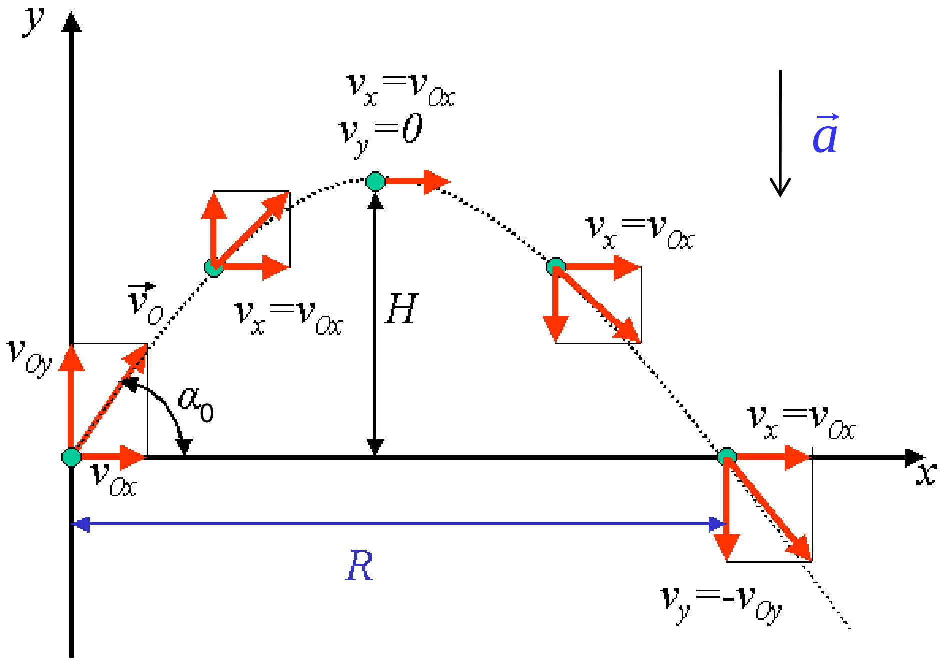
$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0, \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0$$

Decomposição do movimento

- Movimento horizontal com velocidade constante $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$
- Movimento vertical com aceleração constante $a_y = -g$ ("queda livre")



Demonstração: Kit LADIF 1C-02

Vídeos: “Physics Demonstrations in Mechanics” I.4, I.5, I.6

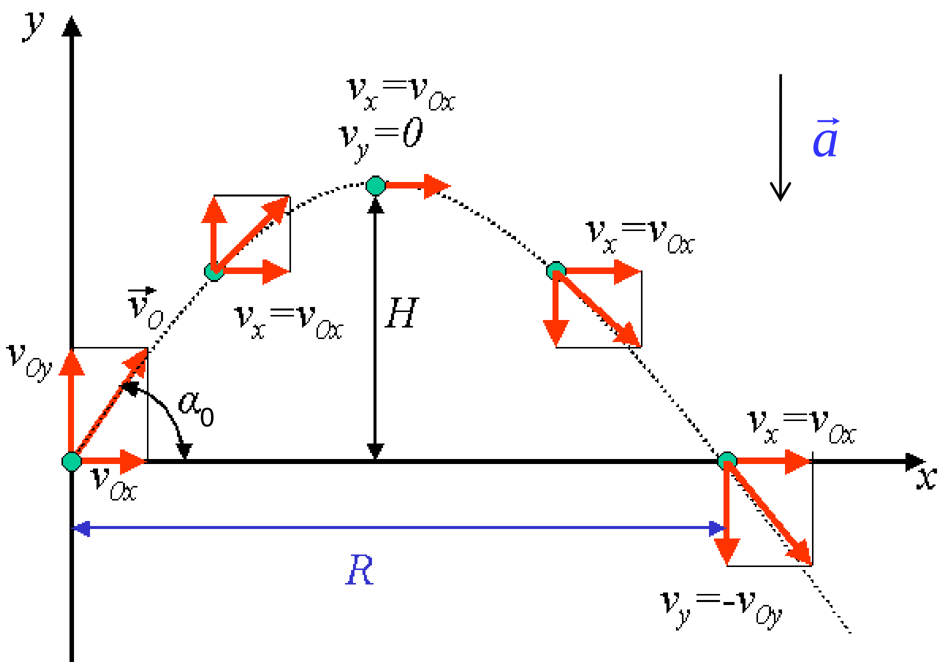
Vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=fwNQKjTj-0w

(a partir de 46:10 min)

Equações do movimento de projétil

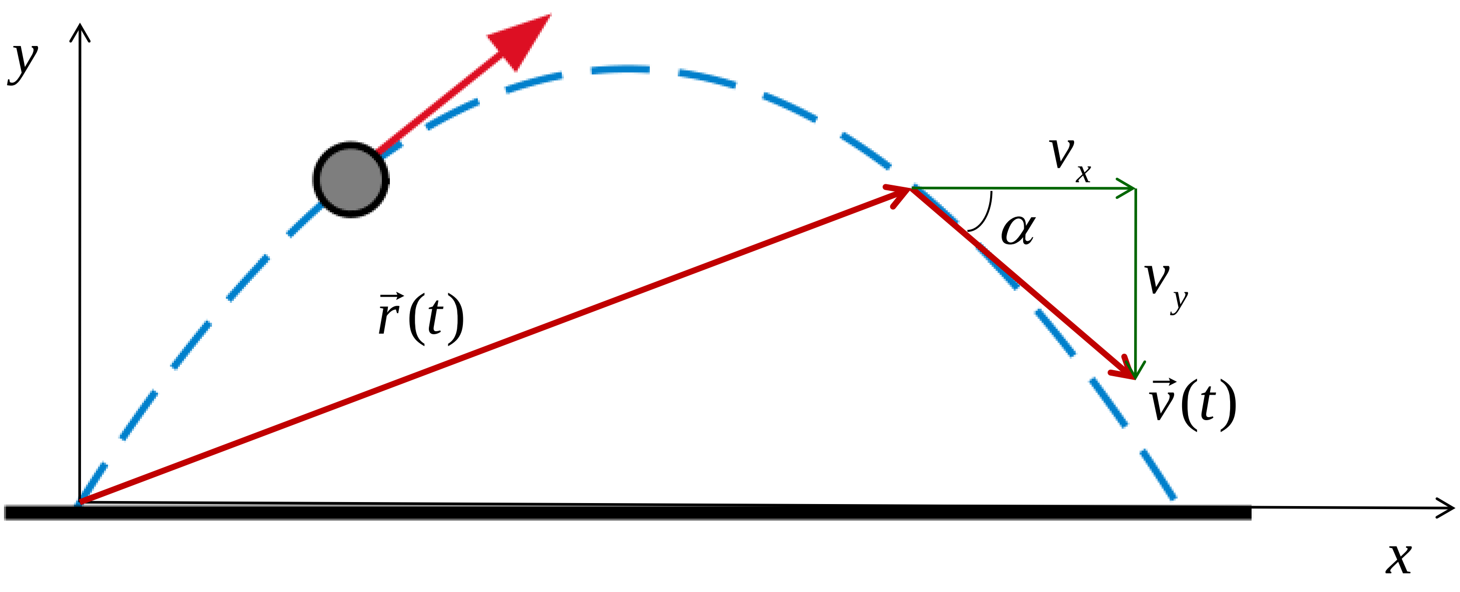
- Movimento horizontal com velocidade constante $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \\ x = (v_0 \cos\alpha_0)t \end{cases}$

- Movimento vertical em queda livre $\begin{cases} v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \\ y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



Aplicações:

- Distância até a origem a qualquer instante $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Módulo da velocidade a qualquer instante $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- Direção e sentido da velocidade: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$

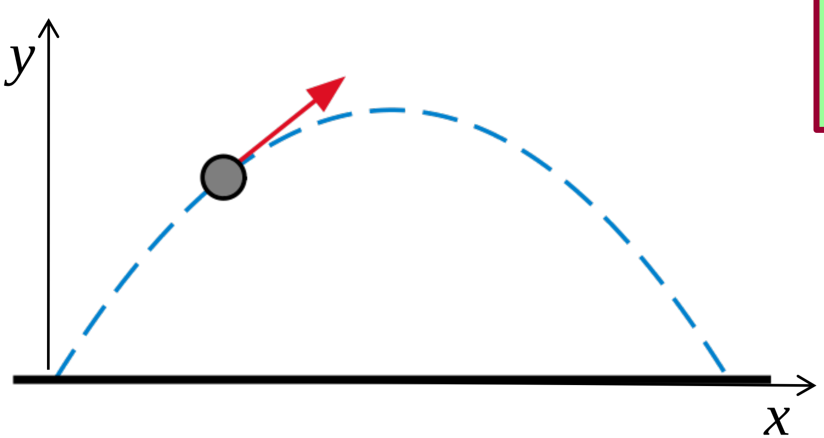


- Equação da trajetória:

Sabemos que: $$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha_0)t \\ y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$$

$$y = (\cancel{v_0} \operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{x}{\cancel{v_0} \cos\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right)^2$$

$$\boxed{y = (\operatorname{tg}\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}x^2}$$



A trajetória é uma parábola
(resultado obtido pela
primeira vez por Galileu)

• Altura máxima:

Obtemos o tempo t_1 para alcançar a altura máxima a partir da condição $v_y = 0$

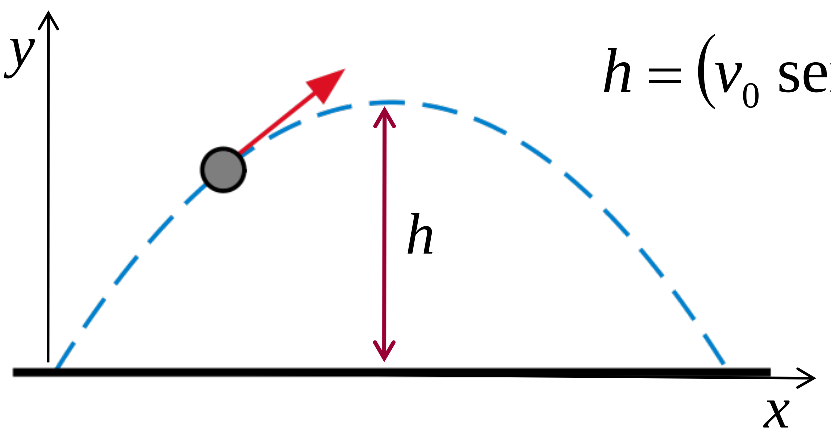
$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Então substituimos t_1 na equação para $y(t)$:

$$h = y(t_1) = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)^2$$



$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}{2g}}$$

Note que a altura será a maior possível para $\alpha_0 = 90^\circ$

• Alcance:

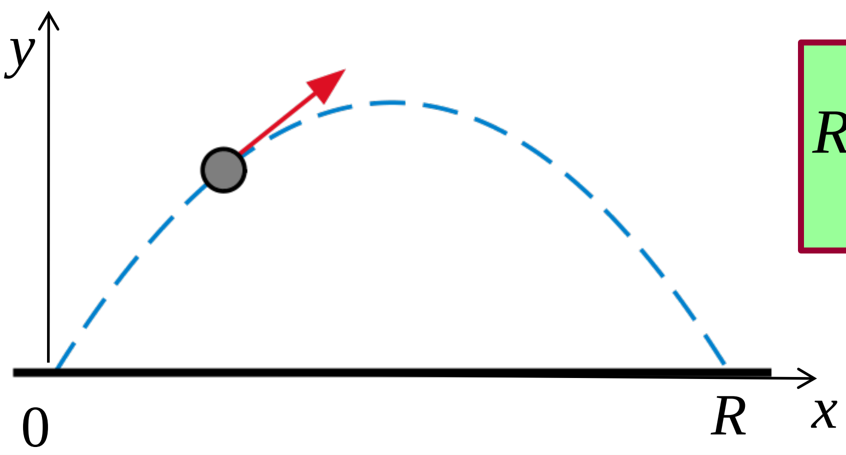
Obtemos o tempo t_2 para o projétil retornar ao solo: $t_2 = 2t_1 = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$

Então substituimos t_2 na equação para $x(t)$:

$$R = x(t_2) = (v_0 \cos\alpha_0)t_2$$

$$R = (v_0 \cos\alpha_0)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)$$

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}$$



$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{g}}$$

Note que o alcance será o maior possível para $\alpha_0 = 45^\circ$

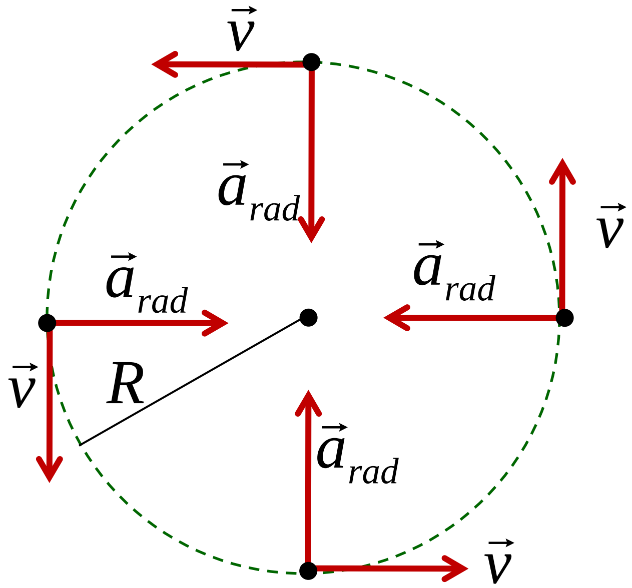
Galileu: “As amplitudes das parábolas descritas por projéteis disparados com a mesma velocidade, mas com ângulos de elevação acima e abaixo de 45º e equidistantes de 45º, são iguais entre si”

Demonstração experimental: Kit LADIF (lançador de projéteis)

3.4 – Movimento circular

Movimento circular uniforme

Movimento ao longo de uma trajetória circular com velocidade escalar constante (velocidade muda apenas de direção): aceleração será sempre perpendicular à velocidade, apontando para o centro do círculo (centrípeta)



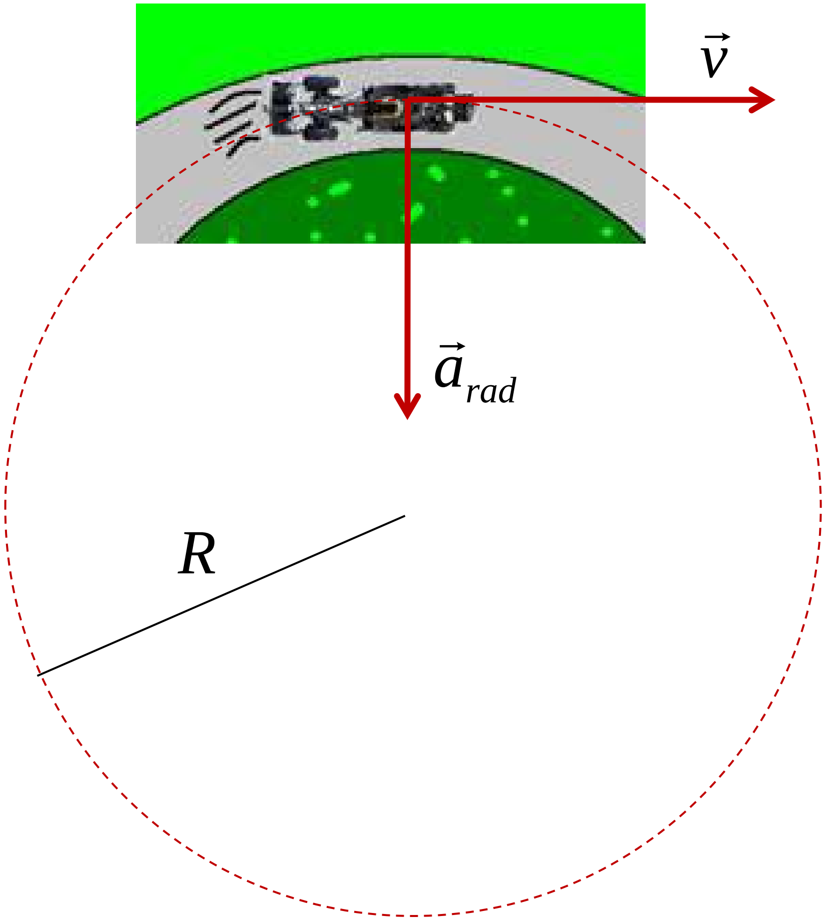
$$\boxed{a_{rad} = \frac{v^2}{R}}$$

Período (T): Tempo para uma volta completa

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Exemplo: Y&F 3.11

Um carro possui aceleração lateral máxima de 0,96*g*. Se o carro se desloca a 144 km/h, qual o raio mínimo da curva que ele pode aceitar?



$$v = 144\text{km/h} = 40\text{ m/s}$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}$$

$$R_{\min} = \frac{v^2}{a_{\max}}$$

$$= \frac{(40\text{ m/s})^2}{0{,}96 \times 9{,}8\text{m/s}^2} = 170\text{m}$$

Exemplo: Órbitas dos planetas

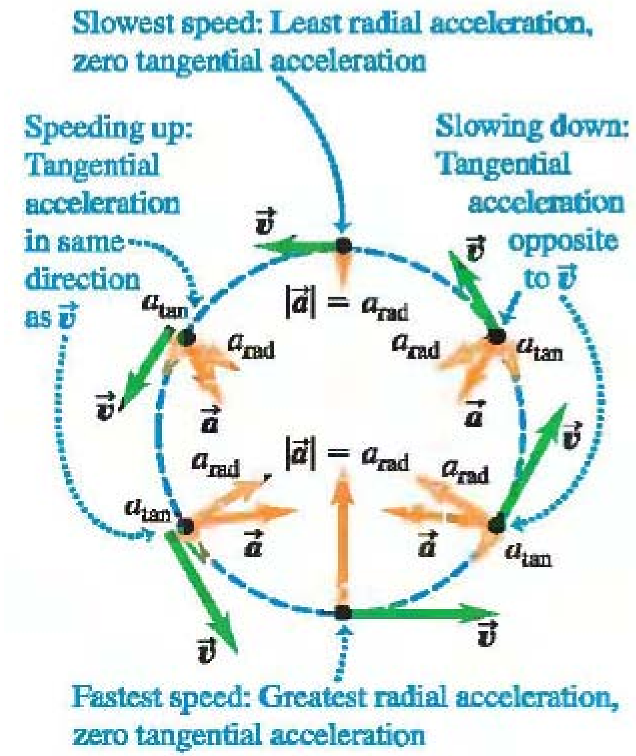
	Raio médio (U.A)	$T_{\text{translação}}$ (anos)	$a_{rad} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ (U.A.)	$R^2 a_{rad}$
Mercúrio	0,39	0,24	267,30	40,7
Vênus	0,72	0,62	73,94	38,3
Terra	1	1	39,47	39,5
Marte	1,52	1,88	16,98	39,2
Júpiter	5,20	11,86	1,459	39,5
Saturno	9,54	29,46	0,4340	39,5
Urano	19,19	84,01	0,1073	39,5
Neptuno	30,06	164,79	0,04370	39,5
Plutão	39,53	247,70	0,02544	39,7

Movimento circular não uniforme

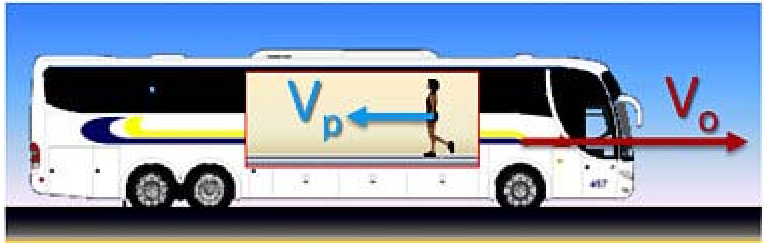
Além da aceleração radial (centrípeta), existe também uma aceleração tangencial, que causa variações na velocidade escalar

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R}, \; a_{tg} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

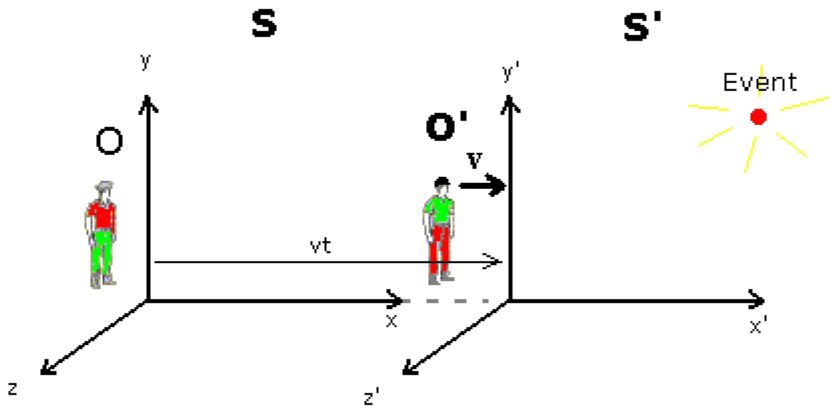
3.30 A particle moving in a vertical loop with a varying speed, like a roller coaster car.



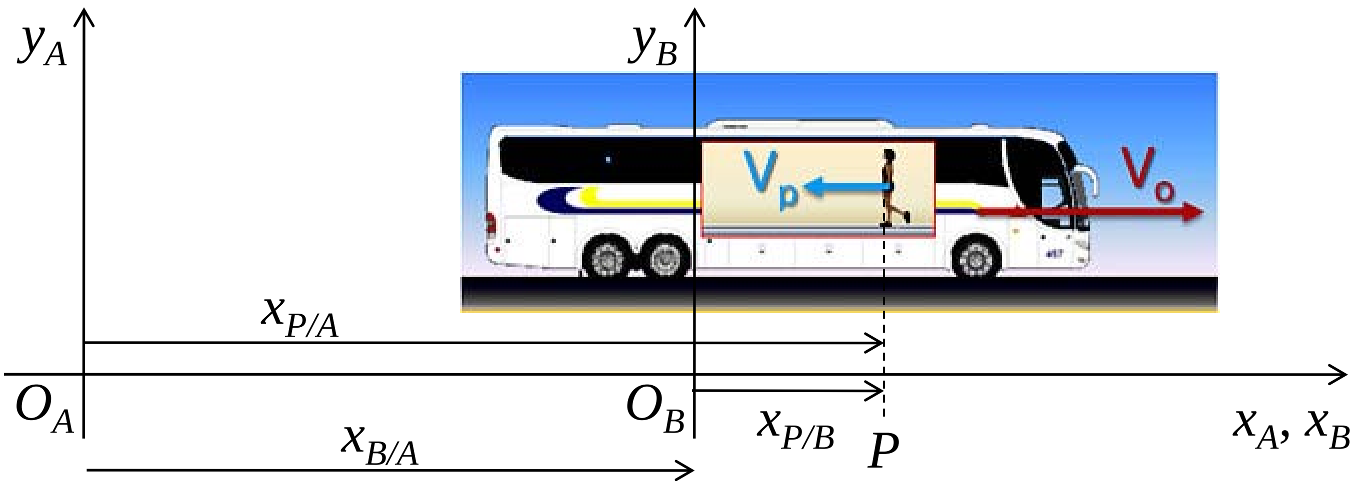
3.5 – Velocidade relativa



Velocidade depende do sistema de referência (referencial): conjunto de eixos e um cronômetro



Em 1D:



A: referencial de um observador externo, parado na estrada

B: referencial de um observador sentado dentro do ônibus

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A}$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \qquad v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}$$

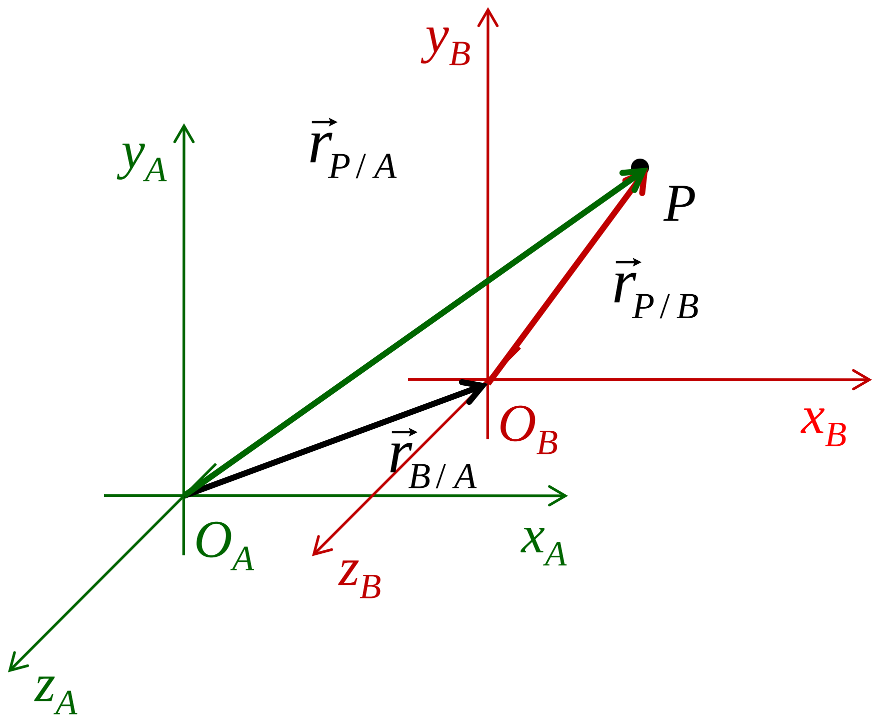
Exemplo:

$v_{P/B} = -1\,\mathrm{m/s}$

$v_{B/A} = 4\,\mathrm{m/s}$

$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A} = 3\,\mathrm{m/s}$

Em 2D e 3D:



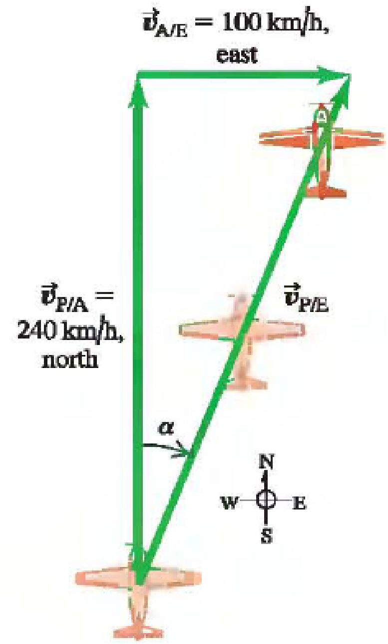
$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A}$$

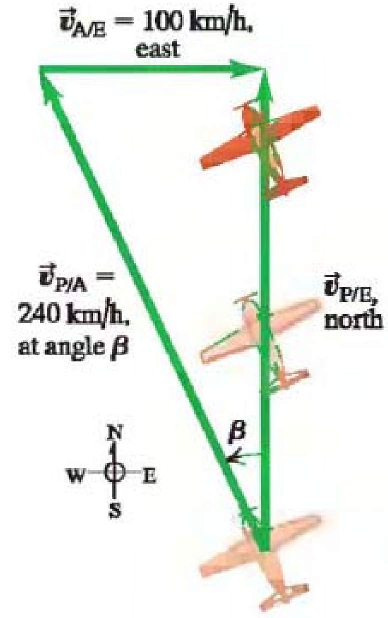
Derivando em relação ao tempo, obtemos:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

Transformação de velocidades de Galileu

Exemplos: Y&F 3.14 e 3.15





Velocidade do avião em relação à Terra:

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

$$v_{P/E} = \sqrt{v_{P/A}^2 + v_{A/E}^2} = 260 \text{ km/h}$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 23^\circ$$

Em que direção o piloto deve inclinar seu avião para ir do Sul para o Norte?

$$\beta = \text{arcsen}\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 25^\circ$$

Velocidade do avião em relação à Terra:

$$v_{P/E} = \sqrt{v_{P/A}^2 - v_{A/E}^2} = 218 \text{ km/h}$$

Exercícios propostos
Física I – Mecânica
Sears-Zemansky & Young-Freedman
12a. Edição - Pearson - Addison-Wesley

Cap 3:
3, 4, 5, 7, 16, 19, 21, 22, 29, 33, 35, 41, 42, 46, 50, 53, 57, 59, 75, 77, 80

Próximas aulas:

6a. Feira 26/08: Aula de Exercícios (sala A-327)

4a. Feira 30/08: Aula Magna (sala A-343) e teste do Cap. 3

Avisos:

Mudança na data da P2: 2a. Feira 28/11, 17h

Testes (valendo até 1,0 ponto na prova):

$$\text{Bonus na prova} = \frac{\left[(\text{Media nos testes}) - 2{,}0\right]}{8{,}0}$$

(Ausências nos testes são computadas como nota zero para o cálculo da média)