



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Mecânica Quântica

Carlos E. Aguiar

Lista de Exercícios 2

1. Os vetores $|\varphi_n\rangle$, $n = 1, 2 \dots N$ formam uma base ortonormal do espaço de estados de um sistema quântico. Nessa base, os vetores de estado $|\psi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são escritos como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |\varphi_n\rangle,$$

$$|\chi\rangle = \sum_{n=1}^N d_n |\varphi_n\rangle.$$

Usando as propriedades que definem o produto escalar, mostre que

(a) $c_n = \langle \varphi_n | \psi \rangle$

(b) $\langle \psi | \chi \rangle = \sum_{n=1}^N c_n^* d_n$

(c) $\|\psi\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$

2. Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formam uma base ortonormal num espaço de estados bidimensional. Considere os vetores de estado

$$|\psi\rangle = 3|0\rangle - 4|1\rangle, \quad |\phi\rangle = 4|0\rangle + 3i|1\rangle.$$

- (a) Calcule os vetores $|\psi\rangle + |\phi\rangle$ e $|\psi\rangle - |\phi\rangle$.
(b) Calcule os vetores $|\psi\rangle + i|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle - i|\phi\rangle$.
(c) Calcule o produto escalar $\langle \phi | \psi \rangle$. Os vetores $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ são ortogonais?
(d) Calcule as normas $\|\psi\|$ e $\|\phi\|$.
(e) Normalize os vetores $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.

3. Considere os vetores de estado

$$|\psi\rangle = 3|0\rangle + z|1\rangle, \quad |\phi\rangle = 4|0\rangle + 3i|1\rangle,$$

onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ formam uma base ortonormal.

(a) Quanto deve valer z para que $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ sejam ortogonais?

(b) Quanto deve valer z para que $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ representem o mesmo estado físico?

4. Considere dois vetores *ortogonais* $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$, e $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$. Demonstre o “teorema de Pitágoras”:

$$\|\psi\|^2 = \|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2.$$

5. Considere dois vetores diferentes de zero, $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Mostre que o vetor

$$|\chi\rangle = |\phi\rangle - \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}|\psi\rangle$$

é ortogonal a $|\psi\rangle$. Faça um diagrama representando geometricamente os vetores $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ e $|\chi\rangle$.

6. Demonstre a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle\psi|\phi\rangle| \leq \|\psi\| \cdot \|\phi\|.$$

Sugestão: há uma demonstração simples baseada nos resultados dos problemas 4 e 5.

7. Demonstre a *desigualdade do triângulo*:

$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|.$$

Faça um diagrama ilustrando geometricamente o significado do teorema. Sugestão: na demonstração, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz (problema 6).