Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Mecânica Quântica

Carlos E. Aguiar

Lista de Exercícios 3

1. Uma partícula quântica pode ser encontrada em apenas duas posições: *aqui* e *ali*. Os autoestados correspondentes a essas posições são, respectivamente, $|aqui\rangle$ e $|ali\rangle$. Suponha que partícula esteja no estado representado pelo vetor

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}\,|aqui\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|ali\rangle\,.$$

   (a) Qual é amplitude de probabilidade de uma medida encontrar a partícula *aqui*? E a probabilidade?

   (b) Qual é amplitude de probabilidade de uma medida encontrar a partícula *ali*? E a probabilidade?

   (c) Qual é a probabilidade de uma medida encontrar a partícula *aqui* ou *ali*?

   (d) Se *aqui* e *ali* correspondem respectivamente às coordenadas $x = 0$ e $x = L$, qual é o valor médio $\langle x\rangle$ da posição no estado $|\psi\rangle$? Qual é a incerteza Δx nesse estado?

   (e) Em um experimento são medidas as posições de 6×10^6 partículas, todas no estado $|\psi\rangle$. Como seria um histograma dos resultados dessas medidas?

2. A partícula do problema anterior (questão 1) pode ter apenas dois estados cinéticos, *repouso* e *movimento*, correspondentes aos vetores $|rep\rangle$ e $|mov\rangle$. A relação entre esses vetores e os autoestados de posição é dada por

$$|rep\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|aqui\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|ali\rangle\,,$$
$$|mov\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|aqui\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|ali\rangle\,.$$

Suponha que o estado da partícula é

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}\,|aqui\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|ali\rangle$$

(note que é o mesmo da questão anterior).

(a) Qual é amplitude de probabilidade de uma medida encontrar a partícula em *repouso*? E a probabilidade?

(b) Qual é amplitude de probabilidade de uma medida encontrar a partícula em *movimento*? E a probabilidade?

(c) Qual é a probabilidade de uma medida encontrar a partícula em *repouso* ou *movimento*?

(d) Se *repouso* e *movimento* correspondem respectivamente às quantidades de movimento $p = 0$ e $p = P$, qual é o valor médio $\langle p\rangle$ do momentum no estado $|\psi\rangle$? Qual é a incerteza Δp nesse estado?

(e) Em um experimento são medidas as quantidades de movimento de $6{\times}10^6$ partículas, todas no estado $|\psi\rangle$. Como seria um histograma dos resultados dessas medidas?

3. Suponha que o vetor de estado da partícula das questões 1 e 2 é

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|aqui\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|ali\rangle\,.$$

Note que a diferença para o vetor $|\psi\rangle$ das questões 1 e 2 é a ausência do "i" na primeira componente.

(a) As probabilidades $P(aqui)$ e $P(ali)$ mudam em relação ao calculado na questão 1?

(b) As probabilidades $P(rep)$ e $P(mov)$ mudam em relação ao calculado na questão 2?

(c) Os vetores $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ representam o mesmo estado físico?

4. Considere novamente a partícula tratada nas questões 1, 2 e 3.

(a) Desenhe um diagrama com os autovetores da posição ($|aqui\rangle$ e $|ali\rangle$) e da quantidade de movimento ($|rep\rangle$ e $|mov\rangle$). Essas grandezas são compatíveis? Existe algum estado quântico em que tanto a posição quanto a quantidade de movimento estejam bem definidas? Justifique suas respostas.

(b) Uma medida da quantidade de movimento é realizada e o resultado é *repouso*. Qual é o vetor de estado da partícula logo após essa medida?

(c) Imediatamente após a medida da quantidade de movimento, uma medida da posição é realizada e o resultado é *aqui*. Qual foi a probabilidade disso ocorrer? Qual é o vetor de estado logo após essa segunda medida?

(d) Logo em seguida a essas duas medidas, é possível afirmar que o sistema está em *repouso* e *aqui*? Ou só é possível afirmar que ele está *aqui*? Ou só é possível afirmar que ele está em *repouso*?

5. Uma grandeza física A pode ter apenas dois valores, a_1 e a_2. Os autovetores correspondentes são $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$. O estado do sistema é representado pelo vetor normalizado

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle .$$

Mostre que a incerteza ΔA no estado $|\psi\rangle$ é dada por

$$\Delta A = |c_1|\cdot|c_2|\cdot|a_1 - a_2| .$$

6. Considere uma partícula que é encontrada em apenas duas posições, $x = +a$ e $x = -a$ (figura 1). A essas posições correspondem os vetores de estado $|+a\rangle$ e $|-a\rangle$. A partícula possui dois estados de energia, $E = 0$ e $E = \varepsilon$, os estados "fundamental" e "excitado" representados pelos níveis na figura 2. Os autovetores correspondentes a essas energias são

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-a\rangle ,$$
$$|\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+a\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-a\rangle .$$

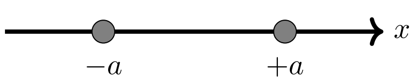

Fig. 1

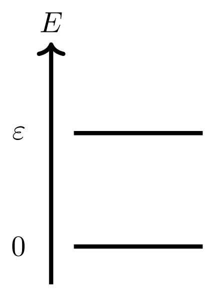

Fig. 2

(a) Faça um gráfico da "função de onda" $\psi_E(x) = \langle x|E\rangle$ para cada um dos autoestados de energia.

(b) Se a partícula estiver no estado fundamental, qual será a probabilidade de uma medida da posição resultar em $x = +a$? E em $x = -a$?

(c) Se a partícula estiver no estado excitado, qual será a probabilidade de uma medida da posição resultar em $x = +a$? E em $x = -a$?

(d) Se a partícula estiver no estado $|+a\rangle$, qual será a probabilidade de uma medida da energia resultar em $E = 0$? E em $E = \varepsilon$?

(e) Se a partícula estiver no estado $|-a\rangle$, qual será a probabilidade de uma medida da energia resultar em $E = 0$? E em $E = \varepsilon$?

(f) Suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja no estado $|\psi(0)\rangle = |+a\rangle$. Qual será o estado $|\psi(t)\rangle$ da partícula em um instante posterior t?

(g) Continuando o item anterior, calcule a probabilidade de uma medida da posição realizada no instante t resultar em $x = +a$. Qual é a probabilidade para $x = -a$ no mesmo instante? Faça um gráfico dessas probabilidades como função do tempo.

(h) Com as probabilidades obtidas no item anterior, calcule o valor médio $\langle x\rangle$ da posição da partícula no instante t. Faça um gráfico de $\langle x\rangle$ como função de t.

(i) Calcule também a incerteza Δx no instante t. Faça um gráfico de Δx como função de t e compare o resultado com o gráfico de $\langle x\rangle$ obtido no item anterior.

(j) Finalmente, calcule o valor médio $\langle E\rangle$ e a incerteza ΔE da energia no instante t. Faça um gráfico dos resultados como função de t.