



Mecânica Quântica

Carlos E. Aguiar

Lista de Exercícios 4

1. No interferômetro de Michelson mostrado na figura 1, fótons de número de onda k são emitidos pela fonte F na direção de um semiespelho S , de onde seguem para os espelhos E_1 e E_2 . A distância de S a E_1 é L_1 , e de S a E_2 é L_2 . Os fótons são refletidos pelos espelhos de volta a S , de onde vão para o detector D ou para a fonte F .

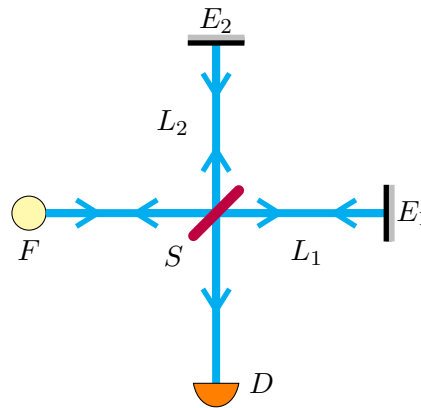


Fig. 1

Considere que os fótons que se deslocam ao longo do braço “horizontal” $F-S-E_1$ do interferômetro são descritos pelo vetor de estado $|1\rangle$, e que o vetor $|2\rangle$ (ortogonal a $|1\rangle$) representa o estado dos fótons que estão sobre o braço “vertical” $D-S-E_2$. Considere também que as amplitudes de transmissão e reflexão de um fóton pelo semiespelho S são, respectivamente, $t = 1/\sqrt{2}$ e $r = i/\sqrt{2}$.

- (a) Qual é o vetor de estado de um fóton logo *antes* de sua primeira passagem por S ?
- (b) Qual é o vetor de estado do fóton logo *após* sua primeira passagem por S ?
- (c) Qual é o vetor de estado do fóton logo *antes* de sua segunda passagem por S ?

- (d) Qual é o vetor de estado do fóton logo *após* sua segunda passagem por S ?
- (e) Qual é a amplitude de probabilidade do fóton chegar ao detetor D ? E a probabilidade disso ocorrer? Faça um gráfico da probabilidade como função de $L_1 - L_2$.
- (f) Calcule a amplitude de probabilidade do fóton chegar a D usando a soma sobre caminhos de Feynman. Identifique a amplitude correspondente a cada caminho entre F e D . Compare os resultados com os obtidos no item anterior.
2. Suponha que um dos braços do interferômetro de Michelson tratado na questão (1) seja bloqueado. A figura 1 ilustra essa situação no caso em que o espelho E_2 é substituído por um obstáculo capaz de absorver toda a luz incidente sobre ele.

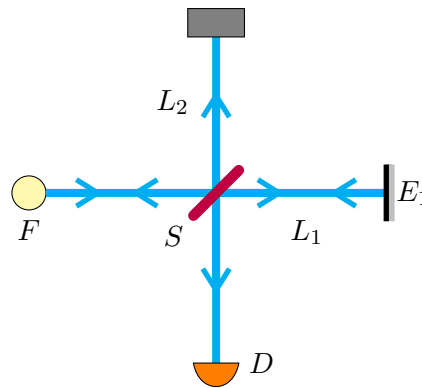


Fig. 1

Considere que os vetores de estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ têm o mesmo significado que na questão (1) e que o estado “fóton absorvido no bloqueio” (zero fóton, ou vácuo) é representado um terceiro vetor, $|0\rangle$, ortogonal aos dois primeiros.

- (a) Qual é o vetor de estado do sistema logo antes de sua primeira passagem por S ?
- (b) Qual é o vetor de estado do sistema logo após sua primeira passagem por S ?
- (c) Qual é o vetor de estado do sistema logo antes de sua segunda passagem por S ?
- (d) Qual é o vetor de estado do sistema logo após sua segunda passagem por S ?

- (e) Qual é a amplitude de probabilidade do fóton chegar ao detector D ? E a amplitude de probabilidade dele ser absorvido no bloqueio? Quais são as probabilidades correspondentes a essas amplitudes? Faça um gráfico da probabilidade do fóton chegar a D como função de $L_1 - L_2$ e compare com o resultado obtido na questão (1).
- (f) Analise os resultados do item anterior usando a soma sobre caminhos de Feynman. Identifique as amplitudes para cada caminho que vai de F a D ou ao bloqueio.
3. Suponha que um dos espelhos do interferômetro de Michelson descrito na questão (1) seja acoplado a uma mola, formando um oscilador tão sensível que a reflexão de um único fóton o coloca em vibração. A figura 1 ilustra essa situação no caso em que o espelho E_2 é acoplado à mola.

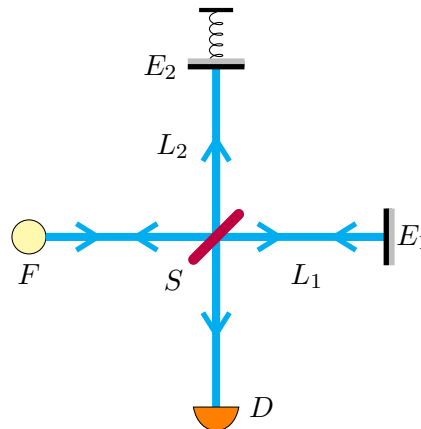


Fig. 1

Os vetores de estado do fóton, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, têm o mesmo significado que na questão (1). Vamos supor que o oscilador também é um sistema quântico de dois estados, com uma base ortonormal dada por $|Z\rangle$ e $|V\rangle$, correspondentes aos estados de “vibração zero” (Z) e “vibração” (V). Com isso, uma base ortonormal do espaço de estados (de dimensão 4) do sistema fóton+oscilador é dada pelos vetores

$$|1, Z\rangle, \quad |2, Z\rangle, \quad |1, V\rangle, \quad |2, V\rangle.$$

A hipótese de que o oscilador é muito sensível corresponde a afirmar que, se o estado inicial for $|Z\rangle$, uma reflexão pelo espelho E_2 será sempre acompanhada pela transição $|Z\rangle \rightarrow |V\rangle$.

- (a) Supondo que o oscilador está inicialmente no estado $|Z\rangle$, qual é o vetor de estado do sistema fóton+oscilador logo antes da primeira passagem do fóton pelo semiespelho S ?
- (b) Qual é o vetor de estado do sistema fóton+oscilador logo após a primeira passagem do fóton por S ?
- (c) Qual é o vetor de estado do sistema fóton+oscilador logo antes da segunda passagem do fóton por S ?
- (d) Qual é o vetor de estado do sistema fóton+oscilador logo após a segunda passagem do fóton por S ?
- (e) Qual é a amplitude de probabilidade do fóton chegar ao detetor D deixando o oscilador sem vibração? Qual é a amplitude de probabilidade do fóton chegar ao detetor D excitando a vibração no oscilador? Quais são as correspondentes probabilidades?
- (f) Qual é a probabilidade do fóton chegar ao detetor D , estando o oscilador vibrando ou não? Faça um gráfico dessa probabilidade como função de $L_1 - L_2$ e compare com o resultado obtido na questão (1).
- (g) Analise os resultados dos dois item anterior usando a soma sobre histórias de Feynman. Note que uma “história” do sistema fóton+oscilador não se resume ao caminho do fóton, mas inclui a evolução do oscilador. Quantas histórias diferentes levam ao mesmo estado final do sistema fóton+oscilador?
4. Um experimento de “dupla fenda” realizado com elétrons está representado na figura 1.

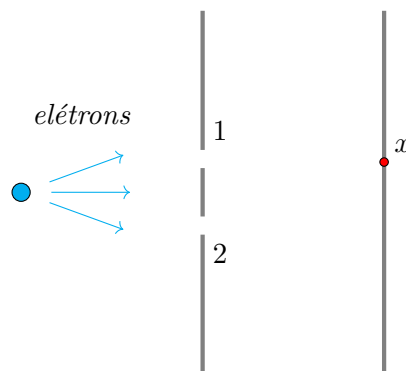


Fig. 1

Quando apenas a fenda 1 está aberta, o estado de um elétron que passou por ela será $|\psi_1\rangle$. A amplitude de probabilidade desse elétron

chegar ao ponto x sobre a tela em frente às fendas será $\psi_1(x) = \langle x|\psi_1\rangle$. Da mesma forma, quando apenas a fenda 2 estiver aberta, o estado do elétron será $|\psi_2\rangle$ e a amplitude de probabilidade no ponto x será $\psi_2(x) = \langle x|\psi_2\rangle$.

- (a) Qual é a probabilidade $P_1(x)$ do elétron ser encontrado no ponto x quando apenas a fenda 1 está aberta? E a probabilidade $P_2(x)$ dele chegar a x quando a apenas a fenda 2 está aberta?
- (b) Suponha que, quando as duas fendas estão abertas, o estado do elétron seja dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle .$$

Qual é a amplitude de probabilidade $\psi(x)$ do elétron chegar ao ponto x ? E a probabilidade $P_{12}(x)$ dele ser encontrado em x ? A probabilidade $P_{12}(x)$ é igual a $\frac{1}{2}P_1(x) + \frac{1}{2}P_2(x)$? Existem efeitos de interferência nesse caso?

5. Numa versão modificada do experimento da questão anterior, uma partícula no estado $|a\rangle$ é colocada em frente à fenda 1. A passagem do elétron por essa fenda deixa a partícula num estado $|b\rangle$ ortogonal a $|a\rangle$. A figura 1 mostra um esquema desse experimento.

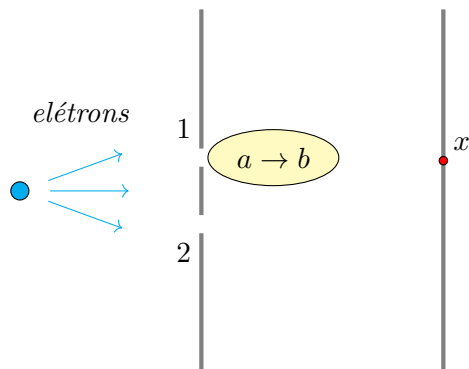


Fig. 1

Suponha que, após a passagem pelas fendas, o estado do sistema elétron+partícula seja dado por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1, b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_2, a\rangle ,$$

onde $|\psi_1\rangle$ é o estado de um elétron que passou apenas pela fenda 1 e $|\psi_2\rangle$ o de um elétron que passou apenas pela fenda 2. As respectivas amplitudes são $\psi_1(x) = \langle x|\psi_1\rangle$ e $\psi_2(x) = \langle x|\psi_2\rangle$, tal como na questão (4)

- (a) Qual é a amplitude de probabilidade $\langle x, a | \Psi \rangle$ do elétron chegar à posição x deixando a partícula no estado a ? E a amplitude $\langle x, b | \Psi \rangle$ do elétron chegar a x deixando a partícula no estado b ?
- (b) Qual é a probabilidade $P(x, a)$ do elétron chegar a x deixando a partícula no estado a ? E a probabilidade $P(x, b)$ dele alcançar x com a partícula no estado b ? Compare essas probabilidades com $P_1(x)$ e $P_2(x)$ obtidos na questão anterior.
- (c) Qual é a probabilidade $P(x)$ do elétron ser encontrado em x , qualquer que seja o estado da partícula? Como essa probabilidade se compara a $\frac{1}{2}P_1(x) + \frac{1}{2}P_2(x)$? Efeitos de interferência podem ser observados? Discuta esse resultado em termos da distinguibilidade ou indistinguibilidade dos caminhos do elétron. Compare esse experimento com aquele descrito na questão (3).
6. Um interferômetro de Mach-Zehnder é modificado pela substituição de um dos espelhos por um semiespelho. O aparato resultante está mostrado na figura 1, onde os semiespelhos são indicados por S e o espelho remanescente por E . As amplitude de transmissão e reflexão pelos semiespelhos são $t = 1/\sqrt{2}$ e $r = i/\sqrt{2}$, respectivamente. As defasagens ao longo dos braços do interferômetro são φ_1 e φ_2 .

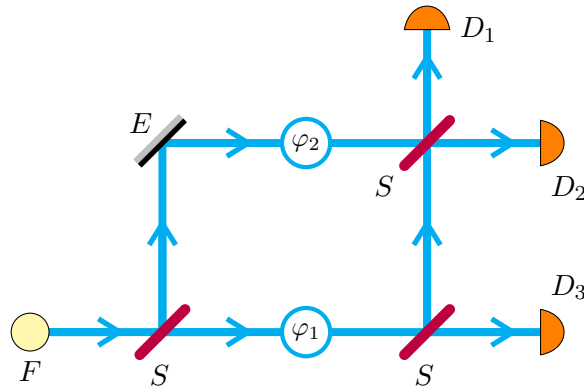


Fig. 1

Utilizando a soma sobre caminhos de Feynman, responda às seguintes questões.

- (a) Qual é a amplitude de probabilidade de um fóton emitido pela fonte F chegar ao detector D_1 ? Faça um diagrama descrevendo cada caminho que contribui para a amplitude. Qual é a probabilidade do fóton chegar a D_1 ? Esboce o gráfico dessa probabilidade como função de $\varphi_1 - \varphi_2$.

- (b) Qual é a amplitude de probabilidade de um fóton emitido pela fonte F chegar ao detetor D_2 ? Faça um diagrama descrevendo cada caminho que contribui para a amplitude. Qual é a probabilidade do fóton chegar a D_2 ? Esboce o gráfico dessa probabilidade como função de $\varphi_1 - \varphi_2$.
- (c) Qual é a amplitude de probabilidade de um fóton emitido pela fonte F chegar ao detetor D_3 ? Faça um diagrama descrevendo cada caminho que contribui para a amplitude. Qual é a probabilidade do fóton chegar a D_3 ? Esboce o gráfico dessa probabilidade como função de $\varphi_1 - \varphi_2$.

7. No interferômetro “duplo” mostrado na figura 1 (um interferômetro de Franson), pares de fótons são produzidos pela fonte F . Os fótons de um par são emitidos simultaneamente e seguem em direções opostas. Cada fóton entra em um interferômetro semelhante ao de Mach-Zehnder, nos quais os semiespelhos S e espelhos E são arranjados para que um dos braços seja muito mais longo que o outro. As distâncias dos detetores D_1 , D_2 , D_3 e D_4 à fonte F são iguais, e a defasagem φ regula a diferença entre os caminhos longo e curto nos dois ramos (direito e esquerdo) do interferômetro.

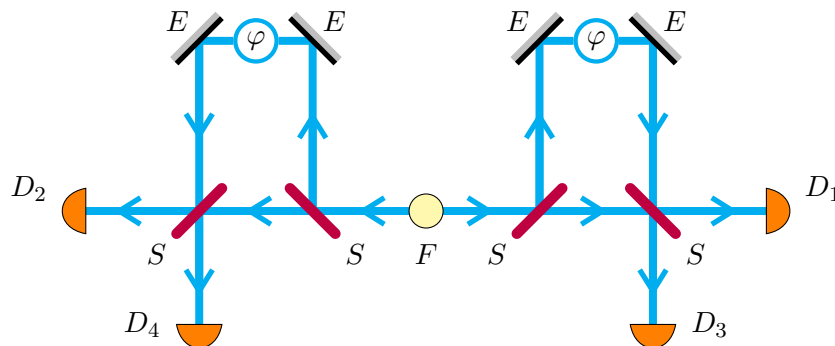


Fig. 1

Usando a soma sobre histórias de Feynman, responda às seguintes questões.

- (a) De quantas maneiras os fótons podem chegar *em coincidência* aos detetores D_1 e D_2 ? Faça diagramas representando essas histórias do par de fótons. Qual é a amplitude de probabilidade associada a cada história?
- (b) Qual é a amplitude de probabilidade dos fótons chegarem em coincidência aos detetores D_1 e D_2 ? E a probabilidade? Faça um

gráfico da probabilidade $P(\varphi)$ dos detetores D_1 e D_2 dispararem em coincidência.

- (c) De quantas maneiras os fótons podem chegar *em coincidência* aos detetores D_1 e D_4 ? Faça diagramas representando essas histórias do par de fótons. Qual é a amplitude de probabilidade associada a cada história?
- (d) Qual é a amplitude de probabilidade dos fótons chegarem em coincidência aos detetores D_1 e D_4 ? E a probabilidade? Faça um gráfico da probabilidade $P(\varphi)$ dos detetores D_1 e D_4 dispararem em coincidência.
- (e) De quantas maneiras um fóton chegar ao detetor D_1 *antes* do outro chegar a D_2 ? Qual é a amplitude de probabilidade disso ocorrer? E a probabilidade?
- (f) De quantas maneiras um fóton chegar ao detetor D_1 *depois* do outro chegar a D_2 ? Qual é a amplitude de probabilidade disso ocorrer? E a probabilidade?
- (g) De quantas maneiras um fóton chegar ao detetor D_1 *antes* do outro chegar a D_4 ? Qual é a amplitude de probabilidade disso ocorrer? E a probabilidade?
- (h) De quantas maneiras um fóton chegar ao detetor D_1 *depois* do outro chegar a D_4 ? Qual é a amplitude de probabilidade disso ocorrer? E a probabilidade?
- (i) Qual é a probabilidade de um fóton chegar a D_1 , qualquer que seja o destino do outro fóton?

Um experimento com os resultados previstos acima está descrito em P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, R. Y. Chiao, *High-visibility interference in a Bell-inequality experiment for energy and time*, Phys. Rev. A 47, p. 2472 (1993).