

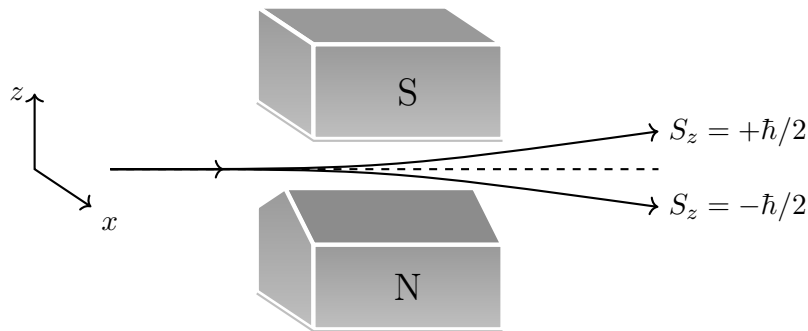


**Mecânica Quântica**

Carlos E. Aguiar

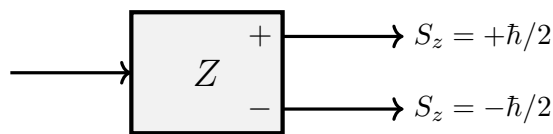
**Lista de Exercícios 5**

- Um aparato de Stern-Gerlach com campo magnético orientado na direção  $z$  está esquematizado na figura abaixo. As partículas do feixe que passa pelo magneto têm spin  $1/2$ .

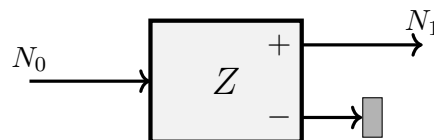


**Fig. 1**

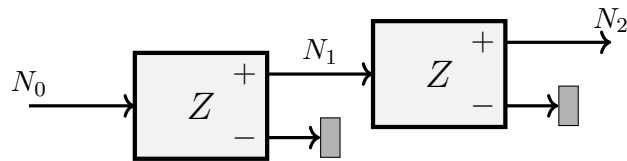
De forma ainda mais esquemática, o experimento de Stern-Gerlach da figura 1 pode ser representado pelo seguinte diagrama.



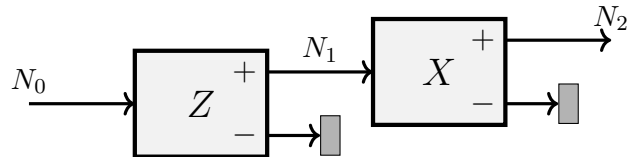
- No experimento de Stern-Gerlach representado pela figura abaixo,  $N_0 = 10^5$  partículas passam pelo aparato. Na saída, o feixe correspondente a  $S_z = -\hbar/2$  é bloqueado, e  $N_1$  partículas são detectadas com  $S_z = +\hbar/2$ . Se o estado inicial das partículas é  $|\psi\rangle = 0.8|+z\rangle - 0.6i|-z\rangle$ , qual é o valor esperado de  $N_1$ ?



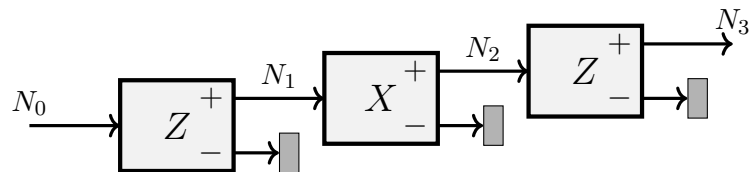
- (b) Dois analisadores de Stern-Gerlach são colocados sucessão, como mostra a figura abaixo. Nas mesmas condições do ítem anterior, calcule quantas partículas sairão do segundo aparato com  $S_z = +\hbar/2$  (ou seja, obtenha o valor esperado de  $N_2$ ).



- (c) Suponha que o campo magnético do segundo analisador do item (b) foi girado de  $90^\circ$  de modo a apontar na direção  $x$  (ver a figura 1 na questão 1), como representado na figura abaixo. Qual será o novo valor de  $N_2$ ?

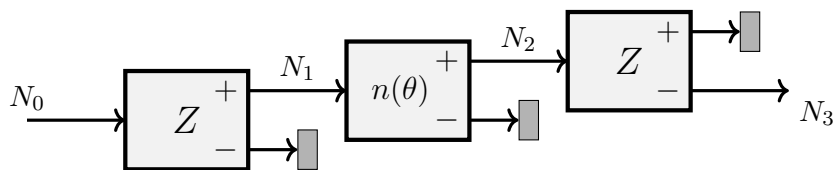


- (d) Finalmente, mais um analisador na direção  $z$  é adicionado ao conjunto, como ilustrado na figura abaixo. Qual é o valor esperado de  $N_3$ ?

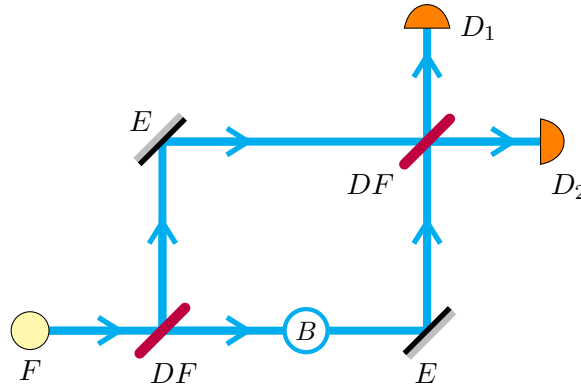


- (e) Se  $S_z$  e  $S_x$  fossem observáveis compatíveis, qual seria o valor de  $N_3$  no experimento do item (d)?

2. Considere o experimento esquematizado abaixo, no qual o analisador intermediário foi girado de maneira a que seu campo magnético aponte na direção  $\hat{n}(\theta) = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x}$  (os eixos  $z$  e  $x$  estão mostrados na figura 1 da questão 1).



- (a) Dado o número  $N_1$  de partículas que entra no analisador intermediário, qual é o valor esperado de  $N_3$ ?
- (b) Faça um gráfico de  $N_3/N_1$  como função de  $\theta$ .
- (c) Para qual ângulo  $\theta$  o valor esperado de  $N_3$  é máximo?
3. Uma partícula de spin  $1/2$  e razão giromagnética  $\gamma$  interage com um campo magnético constante e uniforme  $B$  que aponta na direção  $z$ . No instante  $t = 0$  o estado do spin da partícula é dado pelo vetor  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x$ .
- (a) Calcule o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  no instante  $t$ . Dê sua resposta em termos da frequência de Larmor  $\omega_L = \gamma B$ .
- (b) Calcule a amplitude e a probabilidade de uma medida de  $S_x$ , feita no instante  $t$ , resultar em  $+\hbar/2$ . Faça o mesmo para  $S_x = -\hbar/2$ .
- (c) Em qual instante o spin da partícula apontará (pela primeira vez) na direção  $-x$ ? E quando ele voltará a apontar para  $+x$ ? Qual é o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  em cada um desses instantes?
- (d) Calcule a amplitude e a probabilidade de uma medida de  $S_y$ , feita no instante  $t$ , resultar em  $+\hbar/2$ . Faça o mesmo para  $S_y = -\hbar/2$ .
- (e) Em qual instante o spin da partícula apontará (pela primeira vez) na direção  $+y$ ? E na direção  $-y$ ? Qual é o vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  em cada um desses instantes?
- (f) Calcule a amplitude e a probabilidade de uma medida de  $S_z$ , feita no instante  $t$ , resultar em  $+\hbar/2$ . Faça o mesmo para  $S_z = -\hbar/2$ .
- (g) Calcule os valores médios  $\langle S_x \rangle$ ,  $\langle S_y \rangle$  e  $\langle S_z \rangle$  no instante  $t$ .
- (h) Mostre que o vetor  $\vec{S} = \langle S_x \rangle \hat{x} + \langle S_y \rangle \hat{y} + \langle S_z \rangle \hat{z}$  precessa em torno do eixo  $z$ . Qual é a velocidade angular dessa precessão?
- (i) Calcule as incertezas  $\Delta S_x$ ,  $\Delta S_y$  e  $\Delta S_z$  no instante  $t$ .
4. O interferômetro de Mach-Zehnder mostrado na figura 1 foi modificado pela introdução de um campo magnético  $B$  em um setor de um de seus braços. O interferômetro opera com partículas de spin  $1/2$  (nêutrons, por exemplo) cuja razão giromagnética é  $\gamma$ . O campo magnético aponta em uma dada direção, o eixo  $z$ , e é suposto constante e praticamente uniforme. As partículas levam um tempo  $\tau$  para atravessar a região onde há campo. A figura 1 mostra a fonte de partículas ( $F$ ), os elementos que atuam como divisores de feixe ( $DF$ ) e espelhos ( $E$ ), os detectores de partículas ( $D_1$  e  $D_2$ ) e o setor onde está localizado o campo magnético ( $B$ ). Os divisores de feixe e espelhos não alteram o spin das partículas.



**Fig. 1**

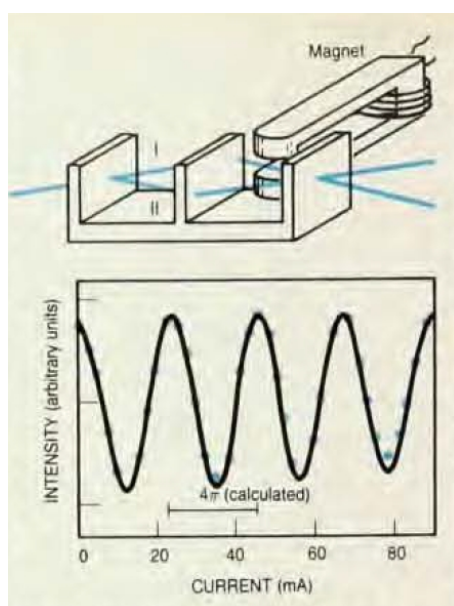
Chamando o braço onde foi criado o campo magnético de “1” e o outro braço de “2”, note que uma base conveniente para o espaço de estados da partícula é

$$|1, +z\rangle, \quad |1, -z\rangle, \quad |2, +z\rangle, \quad |2, -z\rangle$$

onde o primeiro número identifica o braço do interferômetro e  $\pm z$  representam as projeções do spin na direção  $z$ . Vamos supor que uma partícula entre no interferômetro com spin para cima na direção  $z$ .

- Qual é o vetor de estado inicial da partícula, antes de passar pelo primeiro divisor de feixe?
- Qual é o vetor de estado inicial da partícula logo após ela passar pelo primeiro divisor de feixe?
- Qual é a defasagem entre as componentes do vetor de estado, produzida durante a passagem pelo campo magnético (dê sua resposta em termos da frequência de Larmor  $\omega_L = \gamma B$ )?
- Qual é o vetor de estado da partícula imediatamente antes dela passar pelo segundo divisor de feixe?
- Qual é o vetor de estado inicial da partícula logo após ela passar pelo segundo divisor de feixe?
- Qual é a amplitude de probabilidade da partícula disparar o detector  $D_1$ ? E o detector  $D_2$ ?
- Qual é a probabilidade da partícula disparar o detector  $D_1$ ? E o detector  $D_2$ ? Faça um gráfico dessas probabilidades como função de  $\omega_L \tau$ , identificando no eixo horizontal os valores correspondentes aos máximos e mínimos dos padrões de interferência.

- (h) Como as probabilidades calculadas no item anterior mudariam se a partícula tivesse entrado no interferômetro com spin para cima na direção  $x$ ?
- (i) Qual a relação entre as oscilações nas probabilidades calculadas acima e a precessão de Larmor obtida na questão 3? Quantas rotações do spin são necessárias para que as probabilidades se repitam? A figura 2 mostra o resultado de experimento semelhante ao discutido aqui. Para mais detalhes veja S. A. Werner, *Neutron interferometry*, *Physics Today* **33** (12), 24 (1980).



**Fig. 2**