UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Mecânica Quântica

Carlos E. Aguiar

Lista de Exercícios 6

1. Mostre que, na base $|\pm z\rangle$, os estados de spin nas direções z, x e y são representados pelos vetores coluna

$$|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} , \quad |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Mostre também que, na mesma base, os operadores de spin são representados pelas matrizes

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$

2. As matrizes de Pauli são definidas por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que $S_a = (\hbar/2)\sigma_a$, onde $a = x, y, z$. Mostre que as matrizes de Pauli têm as seguintes propriedades:

(a) $\sigma_a^2 = I$.

(b) $\sigma_a \sigma_b = i\sigma_c$, se a, b, c for uma permutação cíclica de x, y, z (ou seja, x, y, z ou z, x, y ou y, z, x).

(c) $\sigma_a \sigma_b = -\sigma_b \sigma_a$, se $a \neq b$.

3. Usando resultados da questão (2), mostre que os operadores de spin obedecem às seguintes regras de comutação:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z\,, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x\,, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y\,,$$

ou seja, $[S_a, S_b] = i\hbar S_c$, onde a, b, c é uma permutação cíclica de x, y, z. É possível haver um estado quântico no qual as três componentes do spin estejam bem definidas? E um estado no qual apenas duas das componentes sejam bem definidas? Justifique suas respostas.

4. O quadrado do módulo do spin é definido por

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2\,.$$

   (a) Usando resultados da questão (2), encontre a matriz que representa o operador S^2 na base $|\pm z\rangle$.
   (b) Que valores podem resultar de uma medida de S^2?
   (c) Mostre que $[S^2, S_a] = 0$, onde $a = x, y, z$.
   (d) É possível haver um estado quântico no qual o módulo do spin e uma de suas componentes estão bem definidos?

5. Seja $\hat{n} = \cos\theta\,\hat{z} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{x}$ um vetor unitário no plano $x - z$.

   (a) Encontre a matriz que representa, na base $|\pm z\rangle$, o operador $S_n = \vec{S}\cdot\hat{n}$ associado à componente do spin na direção $\hat{n}$.
   (b) Mostre que os autovalores de S_n são $\pm\hbar/2$ (spin para cima e para baixo na direção $\hat{n}$).
   (c) Calcule os autoestados $|\pm n\rangle$ de S_n correspondentes aos autovalores $\pm\hbar/2$.
   (d) Se $\hat{a} = \cos\alpha\,\hat{z} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{x}$ e $\hat{b} = \cos\beta\,\hat{z} + \operatorname{sen}\beta\,\hat{x}$ são vetores unitários no plano $x - z$, mostre que

$$\langle +b|+a\rangle = \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\,.$$

   (e) Suponha que um elétron tem spin para cima na direção $\hat{a}$. Mostre que a probabilidade de uma medida encontrar spin para cima na direção $\hat{b}$ é dada por

$$P(+a \to +b) = |\langle +b|+a\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \hat{b}\cdot\hat{a})\,.$$