# AULA 3

***Objetivo**: discutir a observação de colisões no referencial do centro de massa*

***Assuntos**:a passagem da descrição no referencial do laboratório para o referencial do centro de massa; o momento linear e a energia cinética observados no centro de massa; colisões elásticas e inelásticas*

***O que você deve ser capaz ao final desta aula**:*

- *mudar a descrição de um processo para o referencial do centro de massa;*
- *identificar tipos de colisão neste referencial..*

## 1. O referencial do centro de massa

Vimos que o centro de massa é um ponto de um sistema cuja posição é a média, ponderada pelas massas, das posições ocupadas por cada uma das partes do sistema. Se existisse uma partícula de massa igual à massa total $\mathbf{M}$ do sistema, movendo-se com a velocidade $\vec{\mathbf{V}}$ do centro de massa do sistema, o momento linear total desta partícula seria o momento linear total $\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{M}\vec{\mathbf{V}}$ do sistema. A aceleração do centro de massa é dada pela razão entre a resultante das forças externas ao sistema e a massa total do sistema:

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\mathbf{m}_1\vec{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{m}_2\vec{\mathbf{r}}_2 + \ldots\right),\ \vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\mathbf{m}_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m}_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots\right),\ \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\mathbf{M}}\left(\mathbf{m}_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{m}_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \ldots\right)$$

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{M}\vec{\mathbf{V}}$$

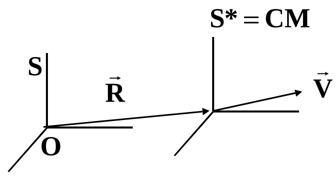
$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}}}{\mathbf{dt}} = \sum \vec{\mathbf{F}}^{\mathbf{EXT}} = \mathbf{M}\vec{\mathbf{A}}$$

A primeira observação importante é que *no referencial do centro de massa, o momento linear total do sistema é nulo*. Isto é,

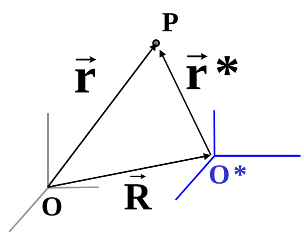
$$\vec{\mathbf{P}}^* = \mathbf{M}\vec{\mathbf{V}}^* = 0$$

Aqui usamos uma notação que já foi utilizada anteriormente: todas as vezes que nos referimos a uma grandeza observada por um referencial que se move com o centro de massa, "estrelamos" esta grandeza. $\vec{\mathbf{P}}^*$ é o momento linear total do sistema medido pelo observador que se move com o centro de massa. $\vec{\mathbf{V}}^*$ é a velocidade do centro de massa do sistema medida por um observador que se move com o centro de massa do sistema. Portanto, $\vec{\mathbf{V}}^* = 0$ (pois a velocidade que você observa para seu próprio movimento é nula!) e está justificada a expressão anterior.

Como se faz a passagem do referencial usado (o laboratório) para o referencial do centro de massa?




Suponhamos que O é um observador no referencial do laboratório que funciona como o ponto de referência para a determinação das posições neste sistema, e que O* seja o observador fixo ao referencial do centro de massa (isto é, que se move junto com o centro de massa) e que é o ponto de referência neste referencial. Tiramos uma fotografia da situação do movimento de uma partícula num determinado instante. Neste instantâneo, temos os dois observadores O e O* e o ponto P ocupado pela partícula.




$$\vec{\mathbf{r}}^* = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}$$

A relação entre as medidas para a posiçãofeitas pelos dois observadores é obtida diretamente da observação da situação descrita na figura: o vetor posição visto pelo centro de massa é igual ao vetor posição subtraído da posição do centro de massa.

Imediatamente, obtemos para a velocidade vista pelo centro de massa

$$\vec{\mathbf{v}}^* = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}$$

Se quisermos então passar a descrição de uma colisão de um referencial qualquer para o referencial do centro de massa, devemos fazer a mudança de cada uma das velocidades e imaginar a colisão com estas novas velocidades:

$$\vec{\mathbf{v}}_1^* = \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{V}}\ ,\ \vec{\mathbf{v}}_2^* = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{V}}\ .$$

**Exemplo 1**

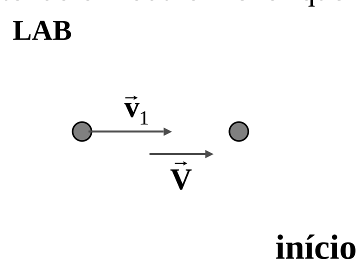
Duas partículas de massas $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$ colidem. No referencial em que estamos observando a colisão – o referencial do laboratório, a partícula 2 está inicialmente em repouso e a partícula 1 tem velocidade inicial $\vec{\mathbf{v}}_1$. Após a colisão, cada uma das

partículas tem velocidade $\vec{\mathbf{u}}_1$ e $\vec{\mathbf{u}}_2$. Queremos descrever a colisão do ponto de vista do referencial do centro de massa.
Na figura, vemos como o observador no laboratório vê a colisão.


A velocidade do centro de massa do sistema, medida por um observador no laboratório, vale (por definição)

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1$$

onde $\mathbf{M}$ é a massa total do sistema. Esta velocidade é constante, se a resultante das forças externas é nula. E também, como mostra a figura, ela tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{\mathbf{v}}_1$, tendo o módulo menor que o de $\vec{\mathbf{v}}_1$.

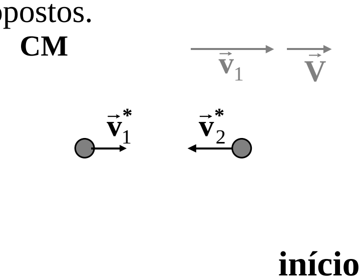



Podemos obter as velocidades das partículas antes da colisão observadas pelo centro de massa:

$$\vec{\mathbf{v}}_1{*} = \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{v}}_1 - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1$$

$$\vec{\mathbf{v}}_2{*} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{V}} = 0 - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1 = -\frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1$$

Como a massa total é maior que cada uma das massas, as duas velocidades têm a mesma direção de $\vec{\mathbf{v}}_1$ e de $\vec{\mathbf{V}}$, e ambas têm módulo menor do que o de $\vec{\mathbf{v}}_1$; e finalmente, têm sentidos opostos.




Observemos que o momento linear total do sistema, medido no centro de massa, pode ser calculado da definição

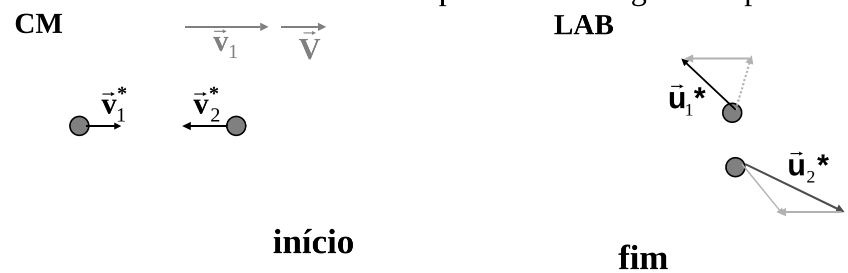
$$\vec{\mathbf{P}}^* = \mathbf{m}_1\vec{\mathbf{v}}_1{}^* + \mathbf{m}_2\vec{\mathbf{v}}_2{}^* = \mathbf{m}_1\frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1 - \mathbf{m}_2\frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1 = 0$$

como esperado...

Para as velocidades após a colisão,

$$\vec{\mathbf{u}}_1{}^* = \vec{\mathbf{u}}_1 - \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{u}}_1 - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1 \;,\; \vec{\mathbf{u}}_2{}^* = \vec{\mathbf{u}}_2 - \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{u}}_2 - \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\vec{\mathbf{v}}_1$$

A figura a seguir resume estas conclusões. Observe que no referencial do centro de massa os momentos lineares das duas partículas são iguais e opostos...




## 2. A energia cinética no referencial do centro de massa

Então o referencial do centro de massa é aquele para o qual o momento linear total do sistema é nulo.

E a energia cinética? Será que há alguma relação que nos permita entender melhor as colisões – quando elas são elásticas, quando inelásticas, por exemplo – olhando para o que acontece com a energia cinética no referencial do centro de massa?

Já demonstramos antes, e vamos repetir, que para um sistema de duas partículas,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2 + \mathbf{K}^*$$

isto é, a energia cinética medida num referencial qualquer tem duas parcelas: uma que corresponde à energia cinética associada ao movimento do centro de massa (a energia que teria uma partícula de massa $\mathbf{M}$ movendo-se com a velocidade do centro de massa $\vec{\mathbf{V}}$), pois $\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2 = \frac{1}{2\mathbf{M}}\mathbf{P}^2$, e outra igual à energia cinética do sistema medida no referencial do centro de massa.

Por que podemos escrever esta expressão? Por definição,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2^2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{K}^* = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1{}^{*2} + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2{}^{*2}$$

Substituindo as expressões que nos permitem passar de um sistema de referência para outro,

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1{*} + \vec{\mathbf{V}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2{*} + \vec{\mathbf{V}}$$

escrevemos

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\left(\vec{\mathbf{v}}_1{*} + \vec{\mathbf{V}}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\left(\vec{\mathbf{v}}_2{*} + \vec{\mathbf{V}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\left(\mathbf{v}_1{*}^2 + \vec{\mathbf{v}}_1{*} \bullet \vec{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^2\right) + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\left(\mathbf{v}_2{*}^2 + \vec{\mathbf{v}}_2{*} \bullet \vec{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1{*}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2{*}^2\right) + \left(\mathbf{m}_1\vec{\mathbf{v}}_1{*} + \mathbf{m}_2\vec{\mathbf{v}}_2{*}\right) \bullet \vec{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2\right)\mathbf{V}^2 =$$

$$= \mathbf{K}{*} + \vec{\mathbf{P}}{*} \bullet \vec{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2$$

e, como $\vec{\mathbf{P}}{*} = 0$,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2 + \mathbf{K}{*}$$

**Voltando ao Exemplo 1,**

a energia cinética do sistema das duas partículas vistas no referencial do laboratório e no referencial do centro de massa, antes da colisão, valem

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1^2$$

$$\mathbf{K}{*} = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\mathbf{v}_1{*}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\mathbf{v}_2{*}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_1\left(\frac{\mathbf{m}_2}{\mathbf{M}}\right)^2\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{m}_2\left(-\frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{M}}\right)^2\mathbf{v}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{\mathbf{M}}\mathbf{v}_1^2$$

Observe da última expressão que a energia cinética no referencial do centro de massa depende da velocidade relativa entre as partículas – a segunda partícula está parada, portanto a velocidade da primeira vista pela segunda vale $\vec{\mathbf{v}}_1$ e a velocidade da segunda, vista pela primeira, vale $-\vec{\mathbf{v}}_1$. Agora você deve voltar e estudar com atenção a última seção da primeira aula...

E como podemos a partir desta expressão discutir melhor a questão da classificação das colisões em elásticas e inelásticas?

Equação básica:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2 + \mathbf{K}{*}$$

O primeiro termo corresponde à “energia cinética associada ao movimento do centro de massa”. Traduzindo: a energia cinética que uma partícula de massa $\mathbf{M}$ teria caso se movesse com a velocidade do centro de massa. Ora, este termo corresponde a

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2 = \frac{1}{2\mathbf{M}}\mathbf{P}^2$$

e o momento linear total na colisão não se altera... Portanto,

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2\right)_{\mathbf{INICIO}} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{V}^2\right)_{\mathbf{FIM}}$$

Qualquer perda na energia cinética do sistema então só pode se dar através da perda na energia cinética vista no referencial do centro de massa. Então:

- ⇨ numa colisão elástica, $\mathbf{K}_{\mathbf{INICIO}} = \mathbf{K}_{\mathbf{FIM}} \Rightarrow \mathbf{K}^*_{\mathbf{INICIO}} = \mathbf{K}^*_{\mathbf{FIM}}$ , e do último resultado ($\mathbf{K}^*$ depende apenas da velocidade relativa das partículas) no referencial do centro de massa as velocidades relativas numa colisão elástica não se alteram;
- ⇨ numa colisão inelástica, $\mathbf{K}_{\mathbf{INICIO}} \neq \mathbf{K}_{\mathbf{FIM}} \Rightarrow \mathbf{K}^*_{\mathbf{INICIO}} \neq \mathbf{K}^*_{\mathbf{FIM}}$ , e então as velocidades relativas mudam.

Qual o processo em que pode ser perdido o máximo de energia cinética?

**Exercício 5**

**Resolver o exercício 28 da lista 13.**

**Exercício 6**

**Resolver o exercício 29 da lista 13.**

**TRABALHO FINAL**

**Escreva em meia página um resumo da discussão destas 3 aulas. Quais os resultados físicos mais importantes?**

Entregar, até sexta feira ao meio dia, os Exercícios 5 e 6 FEITOS EM PARCERIA COM UM OU DOIS COLEGAS, e o trabalho final individual.

Lembre que na quarta feira teremos um teste, no horário habitual de aula, e que voltamos às nossas atividades normais (aulas presenciais). O assunto do teste é *colisões entre duas partículas*.

***Leitura complementar:***

***Capítulo 9 do livro de H.M. Nussenzveig***