2^a Lista de Exercícios de Eletromagnetismo II – 2020/PLE

Prof.: Miguel Quartin

Entrega: 3/10/2020 (não atrasar!)

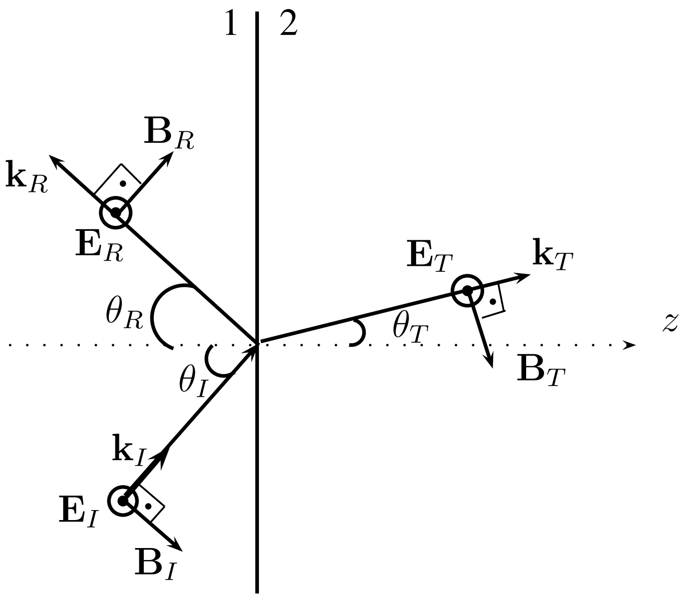
1. Uma onda eletromagnética linearmente polarizada incide sobre uma interface plana que separa os meios dielétricos 1 e 2, de constantes ε_1, μ_1 e ε_2, μ_2, respectivamente. Considere a polarização da onda incidente perpendicular ao plano de incidência, isto é, campo elétrico paralelo à interface plana. Mostre que os coeficientes de Fresnel para as ondas refletida e transmitida são dados por

$$E_{0T} = \left(\frac{2}{1+\alpha\beta}\right) E_{0I}\,; \qquad E_{0R} = \left|\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right| E_{0I}\,, \tag{1}$$

nas quais definimos

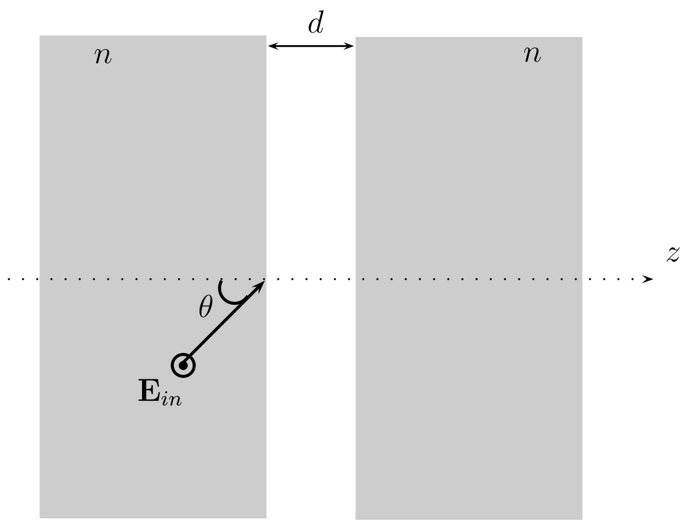
$$\alpha = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}\,; \qquad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}\,. \tag{2}$$

Verifique que a energia se conserva. Em seguida, utilize um método computacional de sua escolha (Mathematica, Python ou outro de sua preferência) e faça o gráficos para a transmitância $T(\theta_I)$ para polarizações paralela e perpendicular nos seguintes casos: (i) o meio 1 é o ar e o meio 2 é a água e (ii) o meio 1 é vidro e o outro é gelo. Agrupe seus gráficos de modo a otimizar a clareza e comparação dos mesmos.



2. [Reflexão total frustrada] Uma onda plana linearmente polarizada de comprimento de onda no vácuo λ se propaga em um meio dielétrico de índice de refração $n > 1$. Ela incide sobre uma interface dupla, formada por planos paralelos em $z = 0$ e $z = d$, como mostra a figura abaixo. A camada intermediária tem índice de refração 1, e o 3^o meio, semi-infinito, tem índice de refração n igual ao do primeiro meio. A polarização incidente é perpendicular

ao plano de incidência e o ângulo de incidência θ é maior do que o ângulo crítico de reflexão total. Determine o campo elétrico nos três meios. Determine a transmitância da interface dupla e discuta sua dependência com d. O que acontece quando $d \gg \lambda$? Considerando agora a onda incidente não polarizada discuta *qualitativamente* e de forma breve, com base nos resultados da questão anterior e na seção 9.3.3 do Griffiths, o que se espera fisicamente da onda transmitida.



3. Considere um meio dielétrico cuja constante dielétrica ε seja uma função da posição. Suponha o meio linear e não-dispersivo e também que não haja cargas livres e que $\mu = 1$. Deduza as equações de onda para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, mostrando que podem ser escritas na forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla\left[\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E})\right] \tag{3}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\times(\nabla\times\mathbf{B})\,. \tag{4}$$

Note que os termos no lado direito acoplam as componentes cartesianas dos campos. O que acontece no caso especial em que ε varia somente na direção da propagação da onda?

4. Um onda plana eletromagnética linearmente polarizada incide sobre uma interface plana, que separa o meio 1 do meio 2. Sejam n_1 e n_2 os índices de refração dos meios e considere $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. O objetivo desta questão é estudar a polarização da onda refletida. A direção de polarização faz 45^o com o plano de incidência.

   (a) Explique em palavras porque é conveniente decompor a onda incidente em suas componentes com polarizações paralela e perpendicular ao plano de incidência.

   (b) Mostre que se $n_2 > n_1$ então a onda refletida tem polarização linear para qualquer ângulo de incidência.

   (c) Analisemos, agora, o caso $n_2 < n_1$. Utilize os coeficientes de Fresnel para encontrar que condição o ângulo de incidência deve satisfazer para que a polarização da onda refletida seja elíptica. É possível obter polarização circular?

5. Considere um guia de ondas oco ao longo da direção $\mathcal{OZ}$. O guia é feito de um material perfeitamente condutor e sua seção reta, apesar de arbitrária, é constante. As soluções monocromáticas para os campos eletromagnéticos propagando-se dentro deste guia são, em notação complexa, da forma

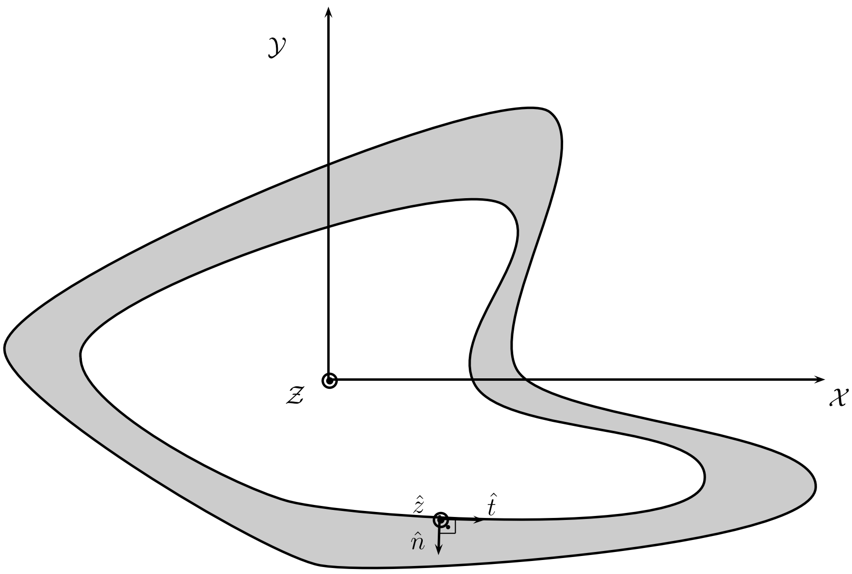
$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}^0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \tag{5}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \mathbf{B}^0(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)}\,. \tag{6}$$

Tais soluções devem satisfazer às condições de contorno

$$\hat{n}\times\mathbf{E}\Big|_{sup.} = 0\,; \qquad \hat{n}\cdot\mathbf{B}\Big|_{sup.} = 0\,, \tag{7}$$

nas quais $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície interna em um dado ponto. A figura abaixo mostra uma seção reta deste guia bem como os vetores unitários $\hat{n}$, normal à superfície, $\hat{t}$, tangencial à superfície e $\hat{z}$, ao longo do guia.



(a) Para os modos TE, mostre que as condições de contorno expressas pelas equações (7) são redundantes e podem ser implementadas impondo-se apenas que

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_{sup.} = 0\,. \tag{8}$$

(b) Para os modos TM, mostre que as condições de contorno expressas pelas equações (7) são redundantes e podem ser implementadas impondo-se apenas que

$$\frac{\partial E_z}{\partial n}\Big|_{sup.} = 0\,. \tag{9}$$

(c) Usando explicitamente as condições

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \quad \text{[para os modos TE]}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0 \quad \text{[para os modos TM]}\,, \tag{11}$$

assim como também o conjunto de equações C, mostre que no caso de um guia de ondas com seção reta retangular, lados em $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, obtemos

$$\omega = \sqrt{c^2 k_g^2 + \omega_{mn}^2}\,, \tag{12}$$

na qual

$$\omega_{mn}^2 \equiv \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right] \pi^2 c^2\,, \tag{13}$$

com

$$\begin{aligned} m, n &= 0, 1, 2, ... \ \text{ para modos TE} & (14)\\ m, n &= 1, 2, ... \ \text{ para modos TM}\,. & (15) \end{aligned}$$

Interprete o significado de ω_{mn}.

Sugestão para o item (a) [Raciocínio análogo vale para o item(b)]:

- Substituindo as expressões para os campos, equações (5) e (6), nas equações de Maxwell, escreva um conjunto de equações análogas às equações 9.179 do Griffiths (conjunto A), um outro conjunto de equações análogas às equações 9.180 (conjunto B) e ainda um outro conjunto (conjunto C) de equações análogas às equações 9.181. Utilize obrigatoriamente a notação e a orientação dos eixos utilizadas no enunciado e ainda as definições

$$\begin{aligned} k_c^2 &:= \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 & (16)\\ \nabla_\perp^2 &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,. & (17) \end{aligned}$$

- Mostre a partir dos conjuntos de equações A e B, respectivamente, que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\perp^0 &= \frac{k_g}{\omega}(\hat{z} \times \mathbf{E}_\perp^0) & (18)\\ \mathbf{B}_\perp^0 &= \frac{ik_g}{k_c^2}\nabla B_z^0\,. & (19) \end{aligned}$$

nas quais utilizamos a notação

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= E_z^0 \hat{z} + \mathbf{E}_\perp^0 & (20)\\ \mathbf{B}^0 &= B_z^0 \hat{z} + \mathbf{B}_\perp^0\,. & (21) \end{aligned}$$

- A partir da equação (18) mostre que B_n^0, componente de $\mathbf{B^0}$ ao longo de $\hat{n}$, é proporcional à E_t^0, componente de $\mathbf{E}^0$ ao longo de $\hat{t}$. Usando, então, a equação (19) chegue à conclusão desejada.

Sugestões de Exercícios do Griffiths (4^a **edição):**
8.2, 8.6, 8.7, 8.8, 8.13, 8.17
9.10, 9.19, 9.25, 9.26, 9.28, 9.31, 9.35, 9.40.