

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Física III – 2010/2
Primeira Prova (P1) – 21/10/2010
Versão: A

Aluno: _____
Assinatura: _____
DRE: _____
Professor: _____
Turma: _____

Seção	Nota original	Iniciais	Nota de revisão
Parte objetiva (total)			
Parte discursiva: Questão 1			
Parte discursiva: Questão 2			
Total			

INSTRUÇÕES: LEIA COM CUIDADO!

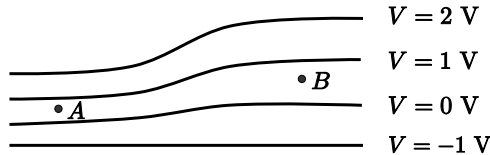
1. Preencha *correta, legível e totalmente* os campos em branco (Aluno, Assinatura, DRE, Professor e Turma) do cabeçalho acima. Sem isso, a correção de sua prova poderá ficar prejudicada!
2. A prova constitui-se de duas partes:
 - uma parte objetiva, perfazendo um total de 5,0 pontos, constituída por dez (10) questões objetivas (de múltipla escolha), cada uma das quais valendo 0,5 ponto, sem penalização por questão errada.
 - uma parte discursiva, perfazendo um total de 5,0 pontos, constituída por duas (2) questões discursivas (ou argumentativas ou dissertativas), cada uma das quais valendo 2,5 pontos.
3. A parte objetiva deve ser preenchida *a caneta*.
4. É vedado o uso de qualquer instrumento eletro-eletrônico (calculadora, celular, iPod, etc)

Formulário

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$
$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$$
$$C = Q/V, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{K}$$

Seção 1. Múltipla escolha (10×0,5=5,0 pontos)

1. Considere o seguinte corte perpendicular a uma família de quatro superfícies equipotenciais, associadas a um campo eletrostático. Assinale a opção que melhor indica o vetor campo elétrico em cada um dos pontos A e B , respectivamente.



- (a) $E^{(A)}$ ↑ $E^{(B)}$ ↑
 (b) $E^{(A)}$ ↑ $E^{(B)}$ ↑
 (c) $E^{(A)}$ ↓ $E^{(B)}$ ↓
 (d) $E^{(A)}$ ↓ $E^{(B)}$ ↓
 (e) $E^{(A)}$ → $E^{(B)}$ →
 (f) $E^{(A)}$ → $E^{(B)}$ →

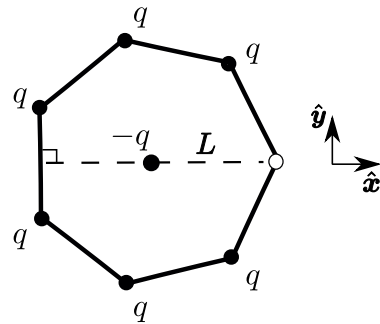
2. Considere as seguintes afirmações: (I) em um ponto qualquer do interior de um condutor em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é sempre nulo; (II) em um ponto qualquer do interior de um isolante, o campo elétrico é sempre nulo; (III) se o fluxo do campo elétrico resultante através de uma superfície fechada (gaussiana) for zero, então não existem partículas carregadas no interior dessa superfície; (IV) para todos os pontos (internos e na superfície) de um condutor em equilíbrio eletrostático o potencial é o mesmo. Dessas afirmações, quais são todas as corretas?

- (a) I, IV.
 (b) I.
 (c) III.
 (d) IV.
 (e) I, III, IV.

3. Um fio retilíneo, fino, muito longo, possui densidade linear de carga constante λ . Ao deslocarmos uma partícula de carga q_0 , desde um ponto a uma distância a até um outro ponto a uma distância b de tal fio, qual é o trabalho realizado pela força elétrica do fio sobre a partícula?

- (a) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b)$.
 (b) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$.
 (c) $\frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{b}$.
 (d) $\frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{a}$.
 (e) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$.

4. Em um heptágono regular, cuja distância do centro a um dos vértices é L , seis de seus vértices estão ocupados por partículas (imóveis) com a mesma carga q . Qual é a força eletrostática sobre uma partícula (imóvel) de carga $-q$ colocada em seu centro?

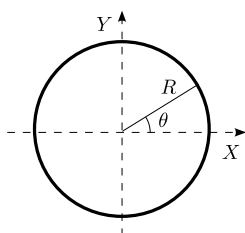


- (a) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \hat{x}$.
 (b) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \hat{x}$.
 (c) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q^2}{L^2} \hat{x}$.
 (d) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3}q^2}{L^2} \hat{x}$.
 (e) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{8}q^2}{L^2} \hat{x}$.

5. Deseja-se conectar um capacitor de $4 \mu\text{F}$ a outro de $8 \mu\text{F}$. Com qual tipo de ligação o capacitor de $4 \mu\text{F}$ terá uma diferença de potencial maior através dele do que o capacitor de $8 \mu\text{F}$? Com qual tipo de ligação o capacitor de $4 \mu\text{F}$ terá um módulo de carga maior em cada placa do que o capacitor de $8 \mu\text{F}$?

- (a) Em série. Em série.
- (b) Em paralelo. Em paralelo.
- (c) Em série. Em paralelo.
- (d) Em paralelo. Em série.
- (e) Em série. Nem em série nem em paralelo.

6. Um anel circular, fino, de raio R , está disposto no plano XY , com centro na origem. Nele, há uma densidade linear de carga $\lambda(\theta) = \lambda_0 |\sin \theta|$, onde θ é o tradicional ângulo polar e λ_0 é uma constante. Qual é a carga total de tal anel?

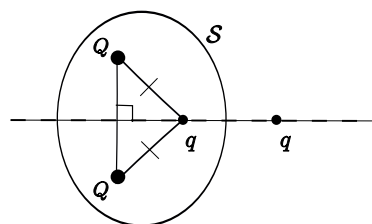


- (a) 0.
- (b) $\lambda_0 R$.
- (c) $\pi \lambda_0 R^2$.
- (d) $2\pi \lambda_0 R$.
- (e) $4\lambda_0 R$.

7. Num acelerador de partículas, temos dois feixes paralelos, um de prótons e outro de elétrons, com a mesma densidade numérica de partículas [(número de partículas)/volume], n . Os prótons movem-se no sentido \hat{x} e os elétrons no sentido oposto, ambos com velocidade de módulo v . Qual é o vetor densidade de corrente nessa situação?

- (a) $-2env\hat{x}$.
- (b) $-env\hat{x}$.
- (c) $\mathbf{0}$.
- (d) $2env\hat{x}$.
- (e) $env\hat{x}$.

8. Um sistema de quatro partículas carregadas, imóveis, está representado na figura abaixo, sendo duas delas sabidamente negativas ($q < 0$). Três dessas partículas constituem um triângulo isósceles, conforme marcado na figura. Levando em conta que a força elétrica resultante sobre a partícula de carga q de tal triângulo é zero, assinale a opção na qual consta uma afirmação correta sobre o fluxo do campo elétrico resultante através da superfície \mathcal{S} , $\Phi_E[\mathcal{S}]$.



- (a) $\Phi_E[\mathcal{S}] > 0$.
- (b) $\Phi_E[\mathcal{S}] = 0$.
- (c) $\Phi_E[\mathcal{S}] < 0$.
- (d) Nada se pode afirmar sobre $\Phi_E[\mathcal{S}]$.

9. Duas cascas esféricas, finas, concêntricas possuem, inicialmente, carga -20 C na casca externa e 10 C na interna. Num certo instante, a casca externa é aterrada. Assinale o que ocorre com o sistema.

- (a) Prótons são deslocados da Terra para a casca externa, até neutralizar a casca externa.
- (b) Elétrons são deslocados da Terra para a casca externa.
- (c) Elétrons são deslocados da casca externa para a Terra, até neutralizar a casca externa.
- (d) Prótons são deslocados da casca externa para a Terra.
- (e) Elétrons são deslocados da casca externa para a Terra, até que a casca externa tenha carga -10 C .

10. Considere os seguintes sistemas carregados: (I) fio retilíneo, fino, finito, uniforme; (II) fio retilíneo, fino, finito, não uniforme; (III) fio retilíneo, fino, infinito, não uniforme; (IV) anel circular, fino, uniforme; (V) bola (esférica), sólida, com densidade de carga variando só com a distância até o centro. Qual a opção que indica, desses sistemas, aquele(s) para o(s) qual(is) pode-se aplicar a lei de Gauss a fim de deduzir uma expressão analítica explícita para o campo elétrico resultante?

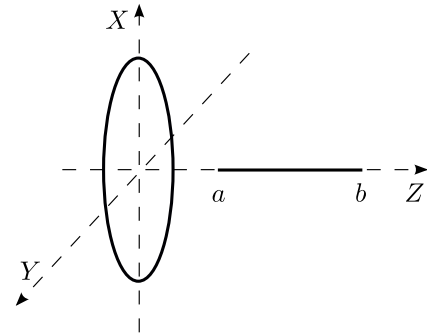
- (a) IV.
- (b) V.
- (c) I, IV.
- (d) I, V.
- (e) IV, V.
- (f) I, IV, V.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,5=5,0 pontos)

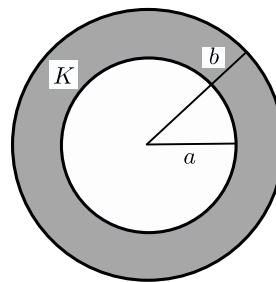
1. Um anel circular, muito fino, de raio R , encontra-se em repouso no plano XY , com seu centro na origem. Tal anel possui carga total Q , uniformemente distribuída.

(a) Calcule o vetor campo elétrico (módulo, direção e sentido) devido a tal anel num ponto do eixo Z , com cota arbitrária z . [1,5 ponto]

(b) Considere agora um bastão retilíneo, muito fino, em repouso, situado no eixo Z , entre $z = a > 0$ e $z = b > a$. Tal bastão também possui carga total Q , uniformemente distribuída. Calcule o vetor força eletrostática sobre tal bastão devido ao anel (Sugestão: a força sobre o bastão constitui-se da soma vetorial das forças sobre cada elemento infinitesimal do bastão carregado). [1,0 ponto]



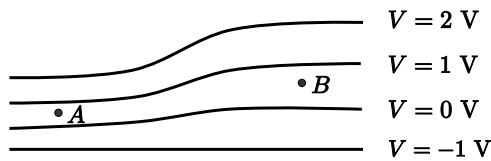
2. Uma bola esférica, condutora, sólida, em equilíbrio eletrostático, de raio a , possui carga total Q . Tal bola é circundada por uma coroa esférica, isolante (de constante dielétrica K), de raios interno a e externo $b > a$, com uma carga total $-Q$, uniformemente distribuída (pelo interior da coroa).
- (a) Calcule o vetor campo elétrico resultante (módulo, direção e sentido) nas três regiões: (I) $0 < r < a$; (II) $a < r < b$; (III) $b < r < \infty$. [1,0 ponto]
- (b) Calcule o potencial elétrico resultante nas três regiões acima mencionadas, fazendo-o zero no infinito. [1,5 ponto]



Gabarito para Versão A

Seção 1. Múltipla escolha (10×0,5=5,0 pontos)

1. Considere o seguinte corte perpendicular a uma família de quatro superfícies equipotenciais, associadas a um campo eletrostático. Assinale a opção que melhor indica o vetor campo elétrico em cada um dos pontos A e B , respectivamente.



- (a) $E(A)$ ↑ $E(B)$ ↑
- (b) $E(A)$ ↑ $E(B)$ ↑
- (c) $E(A)$ ↓ $E(B)$ ↓
- (d) $E(A)$ ↓ $E(B)$ ↓
- (e) $E(A)$ → $E(B)$ →
- (f) $E(A)$ → $E(B)$ →

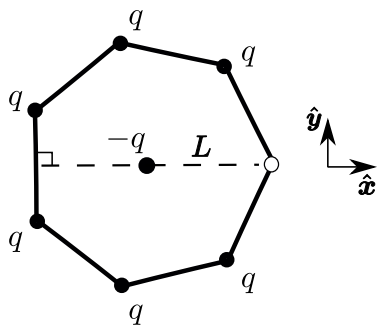
2. Considere as seguintes afirmações: (I) em um ponto qualquer do interior de um condutor em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é sempre nulo; (II) em um ponto qualquer do interior de um isolante, o campo elétrico é sempre nulo; (III) se o fluxo do campo elétrico resultante através de uma superfície fechada (gaussiana) for zero, então não existem partículas carregadas no interior dessa superfície; (IV) para todos os pontos (internos e na superfície) de um condutor em equilíbrio eletrostático o potencial é o mesmo. Dessas afirmações, quais são todas as corretas?

- (a) I, IV .
- (b) I .
- (c) III .
- (d) IV .
- (e) I, III, IV .

3. Um fio retilíneo, fino, muito longo, possui densidade linear de carga constante λ . Ao deslocarmos uma partícula de carga q_0 , desde um ponto a uma distância a até um outro ponto a uma distância b de tal fio, qual é o trabalho realizado *pela* força elétrica do fio sobre a partícula?

- (a) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b)$.
- (b) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$.
- (c) $\frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{b}$.
- (d) $\frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{a}$.
- (e) $\frac{q_0 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$.

4. Em um heptágono regular, cuja distância do centro a um dos vértices é L , seis de seus vértices estão ocupados por partículas (imóveis) com a mesma carga q . Qual é a força eletrostática sobre uma partícula (imóvel) de carga $-q$ colocada em seu centro?

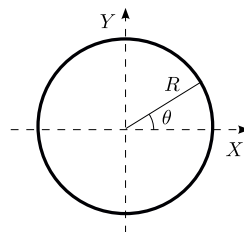


- (a) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \hat{x}$.
- (b) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L^2} \hat{x}$.
- (c) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q^2}{L^2} \hat{x}$.
- (d) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3}q^2}{L^2} \hat{x}$.
- (e) $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{8}q^2}{L^2} \hat{x}$.

5. Deseja-se conectar um capacitor de $4 \mu\text{F}$ a outro de $8 \mu\text{F}$. Com qual tipo de ligação o capacitor de $4 \mu\text{F}$ terá uma diferença de potencial maior através dele do que o capacitor de $8 \mu\text{F}$? Com qual tipo de ligação o capacitor de $4 \mu\text{F}$ terá um módulo de carga maior em cada placa do que o capacitor de $8 \mu\text{F}$?

- (a) Em série. Em série.
- (b) Em paralelo. Em paralelo.
- (c) Em série. Em paralelo.
- (d) Em paralelo. Em série.
- (e) Em série. Nem em série nem em paralelo.

6. Um anel circular, fino, de raio R , está disposto no plano XY , com centro na origem. Nele, há uma densidade linear de carga $\lambda(\theta) = \lambda_0 |\sin \theta|$, onde θ é o tradicional ângulo polar e λ_0 é uma constante. Qual é a carga total de tal anel?

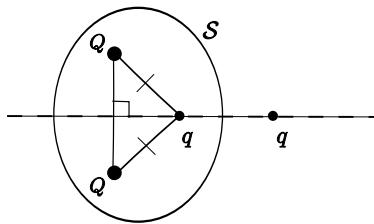


- (a) 0.
- (b) $\lambda_0 R$.
- (c) $\pi \lambda_0 R^2$.
- (d) $2\pi \lambda_0 R$.
- (e) $4\lambda_0 R$.

7. Num acelerador de partículas, temos dois feixes paralelos, um de prótons e outro de elétrons, com a mesma densidade numérica de partículas [(número de partículas)/volume], n . Os prótons movem-se no sentido \hat{x} e os elétrons no sentido oposto, ambos com velocidade de módulo v . Qual é o vetor densidade de corrente nessa situação?

- (a) $-2env\hat{x}$.
- (b) $-env\hat{x}$.
- (c) $\mathbf{0}$.
- (d) $2env\hat{x}$.
- (e) $env\hat{x}$.

8. Um sistema de quatro partículas carregadas, imóveis, está representado na figura abaixo, sendo duas delas sabidamente negativas ($q < 0$). Três dessas partículas constituem um triângulo isósceles, conforme marcado na figura. Levando em conta que a força elétrica resultante sobre a partícula de carga q de tal triângulo é zero, assinale a opção na qual consta uma afirmação correta sobre o fluxo do campo elétrico resultante através da superfície S , $\Phi_E[S]$.



- (a) $\Phi_E[S] > 0$.
 (b) $\Phi_E[S] = 0$.
 (c) $\Phi_E[S] < 0$.
 (d) Nada se pode afirmar sobre $\Phi_E[S]$.

9. Duas cascas esféricas, finas, concêntricas possuem, inicialmente, carga -20 C na casca externa e 10 C na interna. Num certo instante, a casca externa é aterrada. Assinale o que ocorre com o sistema.

- (a) Prótons são deslocados da Terra para a casca externa, até neutralizar a casca externa.
 (b) Elétrons são deslocados da Terra para a casca externa.
 (c) Elétrons são deslocados da casca externa para a Terra, até neutralizar a casca externa.
 (d) Prótons são deslocados da casca externa para a Terra.
 (e) Elétrons são deslocados da casca externa para a Terra, até que a casca externa tenha carga -10 C .

10. Considere os seguintes sistemas carregados: (I) fio retilíneo, fino, finito, uniforme; (II) fio retilíneo, fino, finito, não uniforme; (III) fio retilíneo, fino, infinito, não uniforme; (IV) anel circular, fino, uniforme; (V) bola (esférica), sólida, com densidade de carga variando só com a distância até o centro. Qual a opção que indica, desses sistemas, aquele(s) para o(s) qual(is) pode-se aplicar a lei de Gauss a fim de deduzir uma expressão analítica explícita para o campo elétrico resultante?

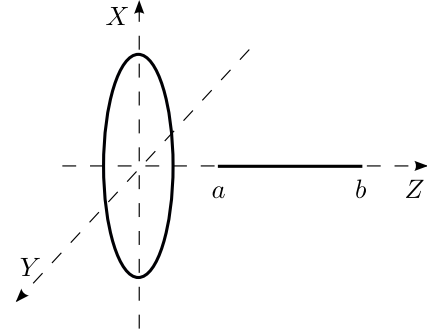
- (a) IV.
 (b) V.
 (c) I, IV.
 (d) I, V.
 (e) IV, V.
 (f) I, IV, V.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,5=5,0 pontos)

1. Um anel circular, muito fino, de raio R , encontra-se em repouso no plano XY , com seu centro na origem. Tal anel possui carga total Q , uniformemente distribuída.

(a) Calcule o vetor campo elétrico (módulo, direção e sentido) devido a tal anel num ponto do eixo Z , com cota arbitrária z . [1,5 ponto]

(b) Considere agora um bastão retilíneo, muito fino, em repouso, situado no eixo Z , entre $z = a > 0$ e $z = b > a$. Tal bastão também possui carga total Q , uniformemente distribuída. Calcule o vetor força eletrostática sobre tal bastão devido ao anel (Sugestão: a força sobre o bastão constitui-se da soma vetorial das forças sobre cada elemento infinitesimal do bastão carregado). [1,0 ponto]



Resolução:

(a) Um elemento infinitesimal do anel criará, no ponto de cota z , um campo elétrico dado por

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2} \hat{\mathbf{s}},$$

onde dq é a carga de tal elemento infinitesimal e \mathbf{s} é o raio vetor do elemento infinitesimal para o ponto no eixo Z , cujo módulo vale $\sqrt{z^2 + R^2}$.

Como, por simetria, o campo resultante devido ao anel só terá componente z , projetamos a expressão acima ao longo de $\hat{\mathbf{z}}$, obtendo

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2} \frac{z}{s}.$$

Logo, já que, na integração, z e R são constantes,

$$\mathbf{E}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

■

(b) Sobre cada elemento infinitesimal do bastão retilíneo, age uma força eletrostática, devida ao anel, dada por

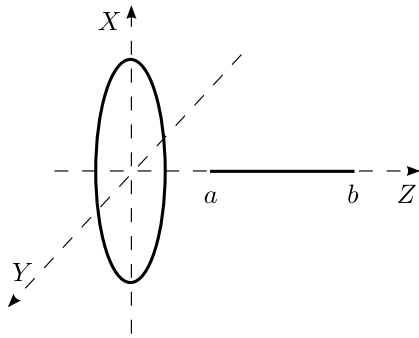
$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E},$$

onde dq é a carga do elemento e \mathbf{E} é o campo acima calculado. Temos, pois,

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \lambda dz \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{Q}{b-a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dz \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \frac{z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Então, já que, nesta nova integração, R é constante, mas z não, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \int_{z=a}^b \frac{z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0(b-a)} \int_{z=a}^b \frac{d(z^2 + R^2)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$



ou seja,

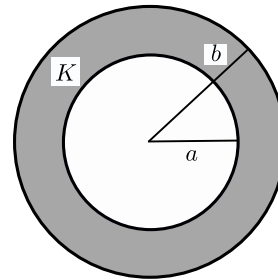
$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(b-a)} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + R^2}} \right) \hat{z}.$$

■

2. Uma bola esférica, condutora, sólida, em equilíbrio eletrostático, de raio a , possui carga total Q . Tal bola é circundada por uma coroa esférica, isolante (de constante dielétrica K), de raios interno a e externo $b > a$, com uma carga total $-Q$, uniformemente distribuída (pelo interior da coroa).

(a) Calcule o vetor campo elétrico resultante (módulo, direção e sentido) nas três regiões: (I) $0 < r < a$; (II) $a < r < b$; (III) $b < r < \infty$. [1,0 ponto]

(b) Calcule o potencial elétrico resultante nas três regiões acima mencionadas, fazendo-o zero no infinito. [1,5 ponto]



Resolução:

(a)

- $0 < r < a$:

Por ser uma região no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático, temos, imediatamente, pelas próprias definições de condutor e de equilíbrio eletrostático (*independentemente da lei de Gauss!*), que

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0}.$$

- $b < r < \infty$:

Por simetria esférica e pela lei de Gauss, o campo na região externa é igual ao produzido por uma partícula de carga total $Q + (-Q) = 0$, no centro de simetria; ou seja:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0}.$$

- $a < r < b$:

Por simetria esférica e pela lei de Gauss, levando em conta o isolante, temos que o campo só tem componente radial $E_r(r)$, tal que:

$$K E_r(r) 4\pi r^2 = Q_{\text{int}}(r) / \epsilon_0,$$

onde Q_{int} é a carga no interior de uma gaussiana esférica, de raio r entre a e b , concêntrica ao centro de simetria. Logo, devido à homogeneidade da carga distribuída na coroa,

$$Q_{\text{int}}(r) = Q - Q \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}.$$

Substituindo isso na equação precedente, obtemos, finalmente,

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K r^2} \left[1 - \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right] \hat{\mathbf{r}}.} \quad (1)$$

■

(b)

- $b < r < \infty$:

O campo elétrico nessa região é zero e o potencial no infinito também; logo:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = 0.}$$

- $a < r < b$:

A integral indefinida da expressão (1), com o sinal trocado, é:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K (b^3 - a^3)} \left[\frac{b^3}{r} + \frac{r^2}{2} \right] + \text{const.}$$

Para determinarmos a constante, impomos a continuidade dessa função em $r = b$; ou seja, devemos ter que, quando $r = b$ na expressão acima, o potencial deve ser zero. Logo,

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K (b^3 - a^3)} \left[\frac{b^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3b^2}{2} \right].}$$

- $0 < r < a$:

Nessa região o potencial deve ser constante e, por continuidade, temos:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K (b^3 - a^3)} \left[\frac{b^3}{a} + \frac{a^2}{2} - \frac{3b^2}{2} \right].}$$

■

