Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2013/1 – Primeira Prova: 27/05/2013
Versão: $\boxed{\text{C}}$

Formulário

$$\vec{F}_e = q\vec{E}\,, \qquad \vec{E} = k_0\frac{q}{r^2}\hat{r}\ \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{K}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A}\,, \qquad \vec{J} = nq\vec{v}\,, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}\,, \qquad V = RI\,,$$

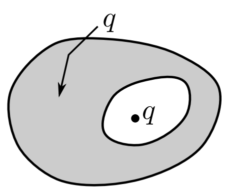
$$\int \frac{du}{(u^2+1)^{1/2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right), \qquad \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u\,, \qquad \int \frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+1)^{1/2}} = \sqrt{u^2+1}\,, \qquad \int \frac{u\,du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\,, \qquad \int \frac{u\,du}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Um condutor com uma cavidade encontra-se em equilíbrio eletrostático e possui uma carga total $q = -20$ mC. No interior da cavidade, existe uma partícula em repouso, de carga também $q = -20$ mC. Quais são as cargas nas superfícies interna e externa do condutor, respectivamente?

(a) 20 mC e −40 mC.
(b) −20 mC e 0 mC.
(c) −10 mC e −10 mC.
(d) 0 mC e −20 mC.
(e) −40 mC e 20 mC.

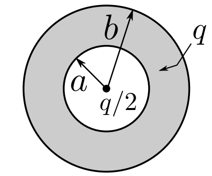


2. Dois fios (1 e 2) condutores, cilíndricos circulares, homogêneos, de mesmos comprimento e área de seção reta, são unidos em série. A resistividade elétrica do fio 1 é o dobro da do fio 2. Existe uma diferença de potencial entre as extremidades do fio combinado. Quais são as razões J_1/J_2 e E_1/E_2 entre os módulos das densidades de corrente (estacionárias) e dos campos elétricos nos fios 1 e 2, respectivamente?

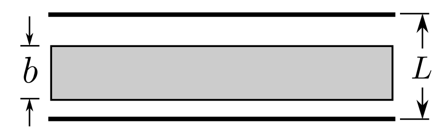
(a) 2 e 1.
(b) 1 e 2.
(c) 2 e 2
(d) 1 e 1.
(e) 1/2 e 1.
(f) 1 e 1/2.
(g) 1/2 e 1/2.

3. Uma casca condutora esférica, espessa, de raios interno e externo iguais a a e b, respectivamente, encontra-se em equilíbrio eletrostático e possui carga q. Uma partícula, de carga $q/2$ está situada, em repouso, no centro de tal casca. Que relação é válida entre os potenciais $V_a := V(r = a)$ e $V_b := V(r = b)$?

(a) $V_b = 2V_a$.
(b) $V_a = 2V_b$.
(c) $V_b = V_a$.
(d) $V_b = -2V_a$.
(e) $V_a = -2V_b$.



4. Uma chapa paralelepipedal de cobre, de espessura b é introduzida em um capacitor ideal de placas retangulares, paralelas, separadas por uma distância L e possuindo ambas área A. Mantendo a carga em cada placa constante, qual é a capacitância *após* a introdução da chapa e qual é a razão entre as energias armazenadas antes e depois da introdução da placa?



(a) $\varepsilon_0 A/(L-b)$ e $L^2/(L-b)^2$.
(b) $\varepsilon_0 (L-b)/A$ e $L^2/(L-b)^2$.
(c) $\varepsilon_0 (L-b)/A$ e $L/(L-b)$.
(d) $\varepsilon_0 A/(L-b)$ e $(L-b)/L$.
(e) $\varepsilon_0 A/(L-b)$ e $L/(L-b)$.

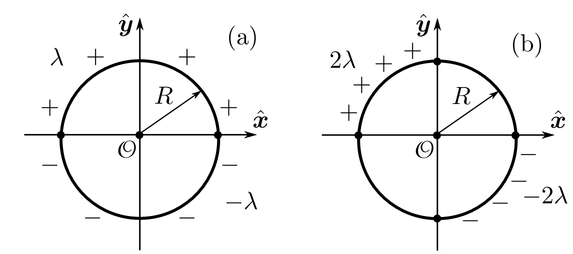
5. Considere as seguintes três afirmações: (I) a lei de Gauss só vale para distribuições estacionárias de carga; (II) todo campo eletrostático pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar, e (III) ao dobrarmos o módulo da carga de um dado capacitor vazio, preservando sua geometria e mantendo-o vazio, dobramos sua capacitância. Qual(is) dessas afirmações é(são) correta(s)?

(a) Nenhuma.
(b) Todas.
(c) I e II.
(d) I e III.
(e) II e III.
(f) Somente I.
(g) Somente II.
(h) Somente III.

6. Duas partículas, de carga q, encontram-se, em repouso, em vértices opostos de um quadrado com aresta de comprimento L. Uma terceira partícula, de carga q_0, é colocada, também em repouso, em um dos vértices originalmente vazios. Qual é a energia potencial elétrica desse sistema completo de três partículas e qual é o trabalho realizado pela força elétrica, devida às duas primeiras partículas, quando a terceira é deslocada de um dos vértices originalmente vazios para o outro, respectivamente?

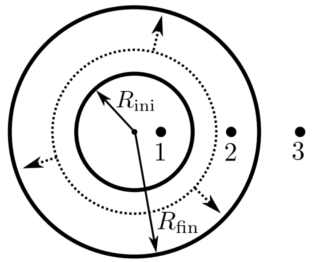
(a) $2k_0 q_0 q/L$ e 0.
(b) $k_0 q^2/(\sqrt{2}L) + 2k_0 q_0 q/L$ e 0.
(c) $2k_0 q_0 q/L + 2k_0 q^2/(\sqrt{2}L)$ e $4k_0 q_0 q/L$.
(d) $2k_0 q_0 q/(\sqrt{2}L)$ e $-4k_0 q_0 q/L$.
(e) $-2k_0 q_0 q/L$ e 0.

7. Considere os seguintes dois sistemas: (a) circunferência de círculo com uma metade uniformemente carregada com densidade linear $\lambda > 0$ e a outra metade com densidade $-\lambda < 0$; (b) circunferência de círculo com um quarto uniformemente carregado com densidade linear $2\lambda > 0$ e o outro quarto, diametralmente oposto, com densidade $-2\lambda < 0$. Quais são os campos elétricos no centro $\mathcal{O}$ dos sistemas (a) e (b), respectivamente? (Sugestão: use o princípio de superposição.)



(a) $-\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$.
(b) $-\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$.
(c) $-\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\dfrac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$.
(d) $-\dfrac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\dfrac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$.
(e) $-\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$.

8. Considere uma casca cilíndrica, muito longa, uniformemente carregada, cujo raio cresce, desde um valor $R_{\rm ini}$ até um valor $R_{\rm fin}$. Neste processo ("de crescimento"), em que a carga permanece constante, o que ocorre com o módulo do campo elétrico em cada um dos três pontos fixos, 1, 2 e 3, respectivamente: aumenta, diminui ou permanece o mesmo?



(a) **1**: permanece o mesmo; **2**: permanece o mesmo, e **3**: aumenta.

(b) **1**: permanece o mesmo; **2**: aumenta, e **3**: aumenta.

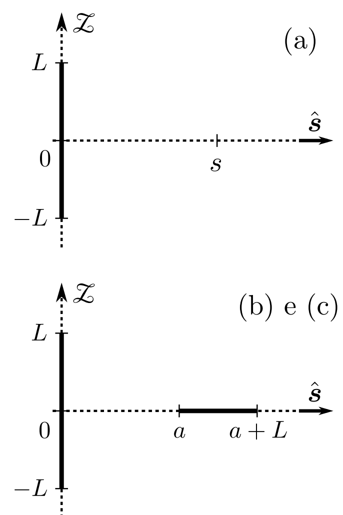
(c) **1**: diminui; **2**: diminui, e **3**: aumenta.

(d) **1**: permanece o mesmo; **2**: diminui, e **3**: permanece o mesmo.

(e) **1**: diminui; **2**: diminui, e **3**: permanece o mesmo.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. [2,6 pontos] Considere um bastão retilíneo, fino, de comprimento $2L$, com densidade linear de carga constante λ_0, situado no intervalo $(-L, L)$ do eixo $\mathcal{Z}$, conforme mostra a figura.
(a) Determine o campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}(s)$ devido a tal bastão, em um ponto genérico, a uma distância s do bastão, de seu plano médio perpendicular de simetria ($z = 0$). [1,0 ponto]
Considere, agora, um segundo bastão retilíneo, fino, de comprimento L, situado no referido plano médio perpendicular de simetria do primeiro bastão. Na verdade, o eixo desse novo bastão é perpendicular ao eixo do primeiro, conforme mostra a figura. Finalmente, esse novo bastão possui densidade linear de carga estacionária, mas não uniforme, dada por
$$\lambda(s) = Cs^2 \,,$$
onde C é uma constante e s continua sendo a distância até o eixo do primeiro bastão.
(b) Determine a carga total desse segundo bastão. [0,6 ponto]
(c) Determine a força eletrostática do primeiro bastão sobre o segundo. [1,0 ponto]



2. [2,6 pontos] Um balão esférico, feito de um material elástico não-condutor, sofre uma expansão que dobra o seu raio inicial R_0. A distribuição superficial de carga no balão é sempre uniforme e, inicialmente, sua densidade (superficial) é igual a σ_0.
(a) Determine o campo elétrico em um ponto arbitrário da região externa do balão, *antes* da expansão. [1,2 ponto]
(b) Determine a densidade superficial de carga no balão, *após* a expansão. [0,2 ponto]

(c) Determine o potencial elétrico na superfície do balão *após* a expansão, supondo que o potencial se anula no infinito. [0,6 ponto]
(d) Determine a variação da energia potencial elétrica causada pela expansão, ou seja, a diferença entre os seus valores final e inicial. [0,6 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. (a)
2. (b)
3. (c)
4. (e)
5. (g)
6. (b)
7. (a)
8. (d)

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) Usaremos o princípio de superposição para campos elétricos.

Um determinado elemento infinitesimal do bastão, com carga dq, contribui com o seguinte campo elétrico no ponto de observação:

$$d\vec{\boldsymbol{E}}(s) = \frac{k_0 dq}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,,$$

onde

$$\mathscr{r}^2 = s^2\sec^2\alpha\,.$$

Ora, por simetria, o campo resultante só terá componente s, que será a integral de

$$\begin{aligned} .dE_s(s) &= \frac{k_0\lambda_0 s dz}{\mathscr{r}^3} \\ &= \frac{k_0\lambda_0 s dz}{(s^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{1}$$

ou de

$$dE_s(s) = \frac{k_0\lambda_0 dz}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha\,.$$

Como

$$z = s\tan\alpha \Rightarrow dz = s\sec^2\alpha d\alpha\,,$$

temos ainda

$$dE_s(s) = \frac{k_0\lambda_0 s\sec^2\alpha d\alpha}{s^2\sec^2\alpha}\cos\alpha.$$

Logo, seja integrando direto (1) pelo formulário, seja integrando essa expressão acima, encontramos

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(s) = \frac{2k_0\lambda_0}{s}\,\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\hat{\boldsymbol{s}}\,,}$$

onde

$$\mathrm{sen}\,\alpha_0 = L/\sqrt{L^2+s^2}\,.$$

■

(b) Para tal bastão, por ser não uniformemente carregado, devemos, ***necessariamente***, integrar λ para obter a carga total. Logo,

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= \int_{s=a}^{a+L} Cs^2\,ds \\ &= \frac{1}{3}C\left[(a+L)^3 - a^3\right]\,, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = \frac{1}{3}C\left[3a^2L + 3aL^2 + L^3\right]\,.}$$

■

(c) Sobre um elemento infinitesimal do segundo bastão, situado a uma distância s do primeiro bastão e com carga dq, atuará uma força

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{F}} &= dq\vec{\boldsymbol{E}}(s) \\ &= Cs^2\,ds\,\frac{2k_0\lambda_0 L}{s\sqrt{s^2+L^2}}\hat{\boldsymbol{s}} \\ &= \frac{2k_0\lambda_0 CLs\,ds}{\sqrt{s^2+L^2}}\,\hat{\boldsymbol{s}}\,. \end{aligned}$$

Logo, a força resultante é

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = 2k_0\lambda_0 CL\left(\sqrt{(a+L)^2+L^2} - \sqrt{a^2+L^2}\right)\hat{\boldsymbol{s}}\,.}$$

■

2. **Resolução:**

(a) Devido à simetria esférica do problema, é mais conveniente encontrarmos o campo elétrico usando a lei de Gauss. Esta última diz que

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

onde $\mathcal{S}$ é a superfície gaussiana escolhida e Q_{enc} é a carga total no interior de $\mathcal{S}$. Graças à simetria esférica, sabemos que o campo só depende da coordenada radial r e só tem componente na direção radial $\hat{\boldsymbol{r}}$, de modo que

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}.$$

Escolhendo-se então uma superfície gaussiana esférica concêntrica ao balão e maior do que ele, temos $d\vec{\boldsymbol{A}} = dA\,\hat{\boldsymbol{r}} = r^2\mathrm{sen}\theta d\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{r}}$, e então

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} E_r(r)\,r^2\mathrm{sen}\theta d\theta d\phi = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0}.$$

Como a densidade σ_0 é constante, temos

$$Q_{\text{enc}} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\sigma_0\,R_0^2\mathrm{sen}\theta d\theta d\phi = 4\pi R_0^2\,\sigma_0$$

e então

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi R_0^2\,\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E_r(r) = \frac{\sigma_0 R_0^2}{\epsilon_0 r^2},$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma_0 R_0^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}.}$$

■

(b) Como o balão apenas se expandiu, sua carga Q_0 continua a mesma. Como a densidade superficial se mantém uniforme, temos, para um balão de raio $2R_0$ (e portanto área $16\pi R_0^2$)

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{Q_0}{16\pi R_0^2} = \frac{1}{4}\frac{Q_0}{4\pi R_0^2} = \frac{\sigma_0}{4},}$$

onde σ_1 é a densidade superficial após a expansão.

■

(c) Sabendo-se que, na região externa ao balão, o campo elétrico após a expansão é idêntico ao campo elétrico anterior à expansão, podemos utilizar o resultado do item (a) aqui. O potencial em um ponto de posição $\vec{\boldsymbol{r}}$ é dado por

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}) - V(\infty) = V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}},$$

onde $\mathcal{C}$ é uma linha qualquer que leve de $\vec{\boldsymbol{r}}$ ao infinito, e já usamos o fato de que $V(\infty) = 0$. Como o campo é radial, é mais conveniente integrá-lo ao longo de uma reta radial, logo,

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_{\vec{\boldsymbol{r}}}^{\infty} E_r\, dr = \frac{\sigma_0 R_0^2}{\varepsilon_0} \int_{\vec{\boldsymbol{r}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma_0 R_0^2}{\varepsilon_0 r},$$

onde $r = |\vec{\boldsymbol{r}}|$. Escolhendo um ponto de posição $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ na superfície do balão expandido, temos $|\vec{\boldsymbol{r}}_1| = 2R_0$ e, portanto,

$$\boxed{V(\vec{\boldsymbol{r}}_1) = \frac{\sigma_0 R_0^2}{2\varepsilon_0 R_0} = \frac{\sigma_0 R_0}{2\varepsilon_0}\,.}$$

■

(d) A variação da energia potencial é dada por $\Delta U = U_1 - U_0$, onde U_1 (U_0) é a energia potencial eletrostática depois (antes) da expansão. Temos, pelo menos, 3 diferentes maneiras de resolver tal item.

- trabalho através de uma ddp:
  Para calcularmos o trabalho para carregarmos o balão (com raio fixo R, por exemplo), desde uma carga inicial $q = 0$ até uma carga final $q = Q$, imaginamos um instante típico intermediário em que o balão tem carga q entre 0 e Q e potencial $v = k_0 q/R$ entre 0 e $V = k_0 Q/R$. Nesse instante, trazemos uma carga infinitesimal adicional dq, desde o infinito até a superfície do balão e o correspondente trabalho infinitesimal para tanto, visto que o potencial foi feito zero no infinito, é
  $$dU = dqv = dqk_0 q/R\,.$$
  Logo, o trabalho total para carregar o bação é:
  $$U = \frac{1}{2}\frac{k_0 Q^2}{R}\,.$$
  Agora, temos somente que subtrair o valor de tal expressão quando $R = R_0$ do seu valor quando $R = 2R_0$, para obter:
  $$\boxed{\Delta U = -\frac{1}{4}\frac{k_0 Q^2}{R_0} = -\frac{\pi \sigma_0^2 R_0^3}{\varepsilon_0}\,.}$$

- **OU** energia de uma distribuição superficial genérica:
  A energia potencial associada a uma distribuição superficial de carga é dada por
  $$U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{\boldsymbol{r}}) V(\vec{\boldsymbol{r}})\, dA,$$
  onde $\mathcal{S}$ é uma superfície dada. No nosso caso, então, temos
  $$U_i = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}_i} \sigma_i V(\vec{\boldsymbol{r}}_i) dA = \frac{V(\vec{\boldsymbol{r}}_i)}{2}\int_{\mathcal{S}_i} \sigma_i\, dA = \frac{Q_0 V(\vec{\boldsymbol{r}}_i)}{2}$$
  onde $i = 0, 1$ e S_0 (S_1) é a superfície do balão antes (depois) da expansão. Usamos ainda o fato de que superfícies esféricas são equipotenciais de $V(\vec{\boldsymbol{r}})$. Sabendo-se então que
  $$V(\vec{r}_0) = \frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0}$$
  e usando o resultado do item (c), temos finalmente
  $$\boxed{\Delta U = \frac{Q_0}{2}(V(\vec{\boldsymbol{r}}_1) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_0)) = -\frac{\pi \sigma_0^2 R_0^3}{\varepsilon_0}\,.}$$

- **OU** energia armazenada em um campo elétrico:
  Uma superfície esférica, de raio R e carga total Q uniformemente distribuída gera, no seu exterior e somente no seu exterior, um campo elétrico de módulo igual a
  $$E(r) = k_0 \frac{|Q|}{r^2} \quad (r > R)\,.$$
  Logo, a energia total armazenada no correspondente campo elétrico é
  $$\begin{aligned} U &= \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2 dr \\ &= 2\pi\varepsilon_0 \int_{r=R}^{\infty} \frac{k_0^2 Q^2}{r^4} r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} k_0 Q^2 \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{2}\frac{k_0 Q^2}{R}\,. \end{aligned}$$
  Portanto, assim como na primeira maneira de resolução acima,
  $$\boxed{\Delta U = -\frac{1}{4}\frac{k_0 Q^2}{R_0} = -\frac{\pi \sigma_0^2 R_0^3}{\varepsilon_0}\,.}$$

■