Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2013/1 – Prova Final: 19/07/2013
Versão: $\boxed{\text{A}}$

Formulário

$$\vec{F}_e = q\vec{E}\,,\qquad \vec{E} = k_0\frac{q}{r^2}\hat{r}\ \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right),\qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\rm int}}{\epsilon_0}\,,\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,,\qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

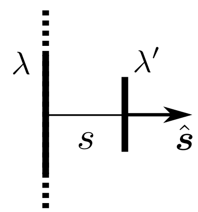
$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,,\qquad C = Q/V\,,\qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,,\qquad I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A}\,,\qquad \vec{J} = nq\vec{v}\,,\qquad V = RI\,,$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}\,,\qquad d\vec{F}_m = I d\vec{\ell}\times\vec{B}\,,\qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,,\qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}\,,\qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\,,\qquad \Phi_{\vec{B}}[1] = LI_1 + MI_2\,,\qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,;$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Temos dois fios retilíneos, finos, paralelos. Um deles é muito longo (supostamente infinito) e o outro tem comprimento L. O fio infinito tem uma densidade linear de carga λ, ao passo que o fio finito tem uma densidade linear de carga λ', ambas constantes. Sabendo que o campo elétrico do fio muito longo, em um ponto qualquer a uma distância s dele, é $\vec{E} = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 s)\,\hat{s}$, qual é a força elétrica do fio infinito sobre o finito?



(a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{s}$.

(b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{s}$.

(c) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda'}{sL}\,\hat{s}$.

(d) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{s}$.

(e) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{s}$.

2. Em um intervalo de tempo $0 < t_1 < t < t_2$, com t_1 e t_2 constantes, um anel circular tem seu raio variando como: $R(t) = At$, onde A é uma constante positiva. Perpendicular ao plano do anel, existe um campo magnético estacionário, mas não uniforme, cujo módulo, no plano do anel, varia como: $B(r) = Cr$, onde C é uma constante positiva e r é a distância até o centro do anel. Qual é o módulo da força eletromotriz induzida ao longo do anel, durante o intervalo de tempo acima mencionado?

(a) $2\pi CA^3t^2$.

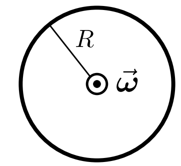
(b) $3\pi CA^3t^2$.

(c) CA^3t^3.

(d) $2CA^3t^2$.

(e) $3CA^3t^2$.

3. Um anel circular, de raio R, possui carga total Q, uniformemente distribuída. Tal anel é colocado para girar, com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante, orientada ao longo do eixo de simetria perpendicular ao seu plano. Qual é, então, o campo magnético no centro do anel?



(a) $\dfrac{\mu_0 Q}{2\pi R}\,\vec{\omega}$.

(b) $\dfrac{\mu_0 Q}{2R}\,\vec{\omega}$.

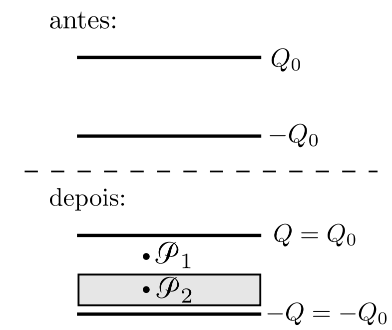
(c) $\dfrac{\mu_0 Q}{4R}\,\vec{\omega}$.

(d) $\dfrac{\mu_0 Q}{R}\,\vec{\omega}$.

(e) $\dfrac{\mu_0 Q}{\pi R}\,\vec{\omega}$.

(f) $\dfrac{\mu_0 Q}{4\pi R}\,\vec{\omega}$.

4. Considere um capacitor ideal de placas quadradas, planas e paralelas. Mantendo-se a carga de cada placa constante, uma chapa espessa de isolante, é inserida na região entre as placas do capacitor original. Sendo E_0 o módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor original, e E_i $(i = 1, 2)$ os módulos do campo elétrico, nos pontos $\mathscr{P}_i$ $(i = 1, 2)$, após a introdução do isolante, o que pode ser afirmado sobre tais módulos?



(a) $E_0 < E_1 < E_2$.

(b) $E_0 > E_1 > E_2$.

(c) $E_0 > E_2 > E_1$.

(d) $E_0 < E_2 < E_2$.

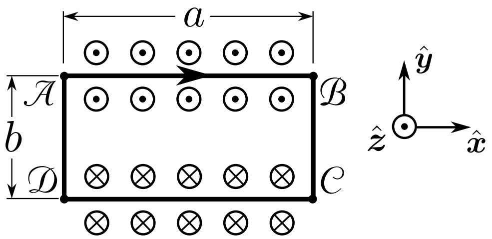
(e) $E_0 = E_2 < E_1$.

(f) $E_0 = E_2 > E_1$.

(g) $E_0 = E_1 > E_2$.

(h) $E_0 = E_1 < E_2$.

5. Um circuito retangular $\mathscr{ABCD}$, de comprimento a e largura b, é percorrido por uma corrente elétrica estacionária, de intensidade I. Os seus lados paralelos $\mathscr{AB}$ e $\mathscr{CD}$ estão sujeitos a campos magnéticos constantes (estacionários e uniformes) iguais a, respectivamente, $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{AB}} = B_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$ ($B_0 = \text{const}$) e $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{CD}} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{AB}}$. Qual é a força magnética resultante sobre o circuito?



(a) $2IB_0a\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

(b) $-2IB_0a\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

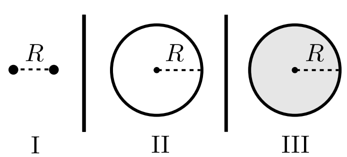
(c) $-2IB_0b\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

(d) $2IB_0b\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

(e) $IB_0(a+b)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

(f) $\vec{\boldsymbol{0}}$.

6. Considere o trabalho realizado pelas forças elétricas nas seguintes três situações: (I) duas partículas, de mesma carga elétrica Q, são trazidas de uma distância infinita até uma distância R (entre si); (II) uma casca esférica (superficial), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito, e (III) uma esfera (sólida), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída em seu volume, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito. O que se pode afirmar sobre tais trabalhos, W_i ($i = \text{I, II, III}$)?



(a) $W_{\text{II}} < W_{\text{III}} < W_{\text{I}}$.

(b) $W_{\text{II}} > W_{\text{III}} > W_{\text{I}}$.

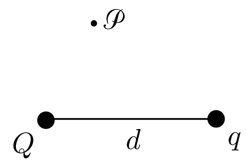
(c) $W_{\text{I}} > W_{\text{II}} > W_{\text{III}}$.

(d) $W_{\text{I}} < W_{\text{II}} < W_{\text{III}}$.

(e) $W_{\text{III}} > W_{\text{I}} > W_{\text{II}}$.

(f) $W_{\text{III}} < W_{\text{I}} < W_{\text{II}}$.

7. Duas partículas, de cargas Q e q ($Q \neq q$), separadas por uma distancia d, produzem um potencial $V(\mathscr{P}) = 0$ no ponto $\mathscr{P}$, sendo o potencial também igual a zero no infinito. Isso significa necessariamente que:



(a) não há força elétrica atuando em uma partícula de teste carregada situada no ponto $\mathscr{P}$.

(b) Q e q devem ter o mesmo sinal.

(c) o campo elétrico tem que ser nulo no ponto $\mathscr{P}$.

(d) o trabalho para trazer a partícula de carga Qdo infinito para uma distância d da partícula de carga q é zero.

(e) o trabalho realizado pela força elétrica ao trazer uma partícula de teste carregada do infinito para o ponto $\mathscr{P}$ é zero.

8. Um próton e um elétron se movem, paralelamente, com velocidades (vetoriais) constantes iguais e de módulo muito pequeno. A força elétrica entre eles é atrativa ou repulsiva? E a força magnética? E a força eletromagnética resultante (elétrica + magnética)?

(a) Atrativa. Atrativa. Atrativa.

(b) Atrativa. Atrativa. Repulsiva.

(c) Atrativa. Repulsiva. Atrativa.

(d) Atrativa. Repulsiva. Repulsiva.

(e) Repulsiva. Repulsiva. Repulsiva.

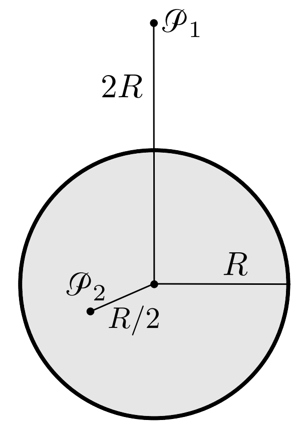
(f) Atrativa. Nula. Atrativa.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. [2,6 pontos] Uma esfera (sólida), de raio R e carga total Q, possui densidade volumar de carga dada por

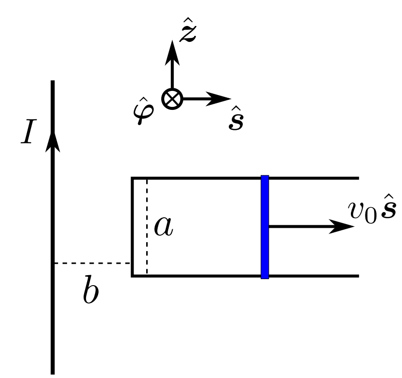
$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

onde ρ_0 é uma constante e r é a usual coordenada radial, medida a partir do centro da esfera.



(a) Deduza uma expressão para Q como função de ρ_0 e R. [0,6 ponto]
(b) Determine o campo elétrico nas duas regiões típicas do espaço: $0 \le r \le R$ e $R \le r < \infty$. [1,0 ponto]
(c) Determine a diferença de potencial, $V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1)$, entre os pontos $\mathscr{P}_1 = (2R, \theta_1, \varphi_1)$ e $\mathscr{P}_2 = (R/2, \theta_2, \varphi_2)$. [1,0 ponto]

2. [2,6 pontos] Um fio retilíneo, fino, muito longo, transporta uma corrente estacionária, de intensidade I. A uma distância b do fio, há um circuito composto por fios condutores ideais (sem resistência) e uma barra deslizante, de comprimento a, também condutora, com resistência R. No instante $t = 0$, a barra se encontra no início do circuito (portanto, à distância b do fio), e é, então, puxada para a direita, com uma velocidade constante $v_0\hat{\boldsymbol{s}}$.



(a) Deduza o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, devido ao fio retilíneo, em um ponto arbitrário, de coordenadas cilíndricas (s, φ, z). [0,6 ponto]
(b) Determine o fluxo do campo magnético através do circuito como função do tempo. [1,0 ponto]
(c) Determine o módulo e o sentido da corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{A}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. (d)
2. (a)
3. (f)
4. (g)
5. (b)
6. (a)
7. (e)
8. (c)

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) Por definição,

$$dQ(r) = \rho(r) d\mathcal{V}\,,$$

onde

$$\rho = \rho_0\,(1 - r/R)\;.$$

Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), podemos escolher de trabalhar direto com a carga dentro de uma casca esférica, de raio interno r e espessura (infinitesimal) dr, cujo volume (infinitesimal) é, pois,

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr\,.$$

Logo, a carga (infinitesimal) correspondente é

$$dQ = 4\pi\rho_0\left(r^2 - r^3/R\right) dr\,,$$

de modo que a carga total na esfera é

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\rho_0 \int_{r=0}^{R} \left(r^2 - r^3/R\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{R}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3\,.}$$

■

(b) Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), convém utilizar coordenadas esféricas (r, θ, φ) e o campo elétrico só terá componente radial E_r, sendo esta dependente unicamente da coordenada r, ou seja,[1]

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\varphi) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\varphi)\,.$$

Usaremos, agora, a lei de Gauss. Como o módulo do campo elétrico só depende da distância até o centro da distribuição e a sua direção é radial, somos levados a escolher como superfície gaussiana a superfície $\mathcal{S}$ de uma

[1]Note, *en passant*, que o campo em si depende das três coordenadas: de r, por intermédio da componente E_r, e de θ e φ, por intermédio do versor $\hat{\boldsymbol{r}}$.

esfera genérica, de raio r, que passa pelo ponto genérico $\mathscr{P}$ onde queremos calcular o campo. Com isso, por definição de fluxo, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}[\mathcal{S}] &:= \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \oint_{\mathcal{S}} E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dA \\ &= E_r(r) \oint_{\mathcal{S}} dA \\ &= 4\pi r^2 E_r(r)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, devemos calcular a carga Q_{int}, no interior da gaussiana, para as duas regiões típicas do espaço.

- $\underline{R \le r < \infty}$:
  Aqui, obviamente, a carga encerrada é a carga total da esfera:

  $$Q_{\text{int}} = Q\,.$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,,$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,.}$$

- $\underline{0 \le r \le R}$:
  Aqui, a carga encerrada é aquela dada por uma integral definida semelhante à do item (a), exceto pelo limite superior, que agora vale $r < R$ e *não* R (pois estamos dentro da distribuição de carga). Logo,

  $$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^{r} \left(r'^2 - r'^3/R\right) dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\,. \end{aligned}$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{4}\frac{r^2}{R}\right)$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}}\,,}$$

  ou

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R^3}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,.}$$

Coligindo os resultados, temos, ainda, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^3}\left(4 - 3\dfrac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,. \end{cases}$$

■

(c) Por definição,

$$dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} .$$

Logo, integrando desde $\mathscr{P}_1$ até $\mathscr{P}_2$, temos

$$\begin{aligned} V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) &= -\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= -\int_{r=2R}^{R} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} - \int_{r=R}^{R/2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= -\int_{r=2R}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dr - \int_{r=R}^{R/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right) r\, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{r=2R}^{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2r^2 - \frac{r^3}{R}\right)\bigg|_{r=R}^{R/2} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) = \frac{9Q}{32\pi\varepsilon_0 R}} .$$

■

2. **Resolução:**

(a) Devido à simetria cilíndrica da distribuição de corrente estacionária, suplementada pela lei de Gauss do magnetismo e condições de contorno apropriadas, temos que

$$\vec{\boldsymbol{B}}(s, \varphi) = B_\varphi(s)\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) .$$

Isso sugere que, na aplicação da lei de Ampère para determinação do campo magnético, escolhamos como curva ampèriana uma circunferência de círculo $\mathscr{C}$, de raio s, coaxial com o eixo da corrente. Ao longo dela, a circulação do campo magnético é, pois,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{C}] &:= \oint_{\mathscr{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= \oint_{\mathscr{C}} B_\varphi(s) d\ell_\varphi \\ &= B_\varphi \oint_{\mathscr{C}} d\ell_\varphi \\ &= 2\pi s B_\varphi(s) . \end{aligned}$$

Por outro lado, a corrente encerrada é

$$I_{\text{enc}} = I .$$

Logo, pela lei de Ampère, temos

$$B_\varphi(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} ,$$

ou

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}} .$$

■

(b) Em um determinado instante t, a barra se encontra na posição radial

$$s(t) = b + v_0 t .$$

Nesse instante, o circuito completo encontra-se imerso no campo magnético *não* uniforme, devido ao fio retilíneo infinito, de modo que o correspondente fluxo através da superfície retangular $\mathscr{S}$ definida pelo circuito envolve uma integral de superfície não trivial, dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &:= \int_{\mathscr{S}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \int_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} . \end{aligned}$$

Qual é o vetor $d\vec{\boldsymbol{A}}$? Naturalmente, pode ser tomado como aquele associado a um retângulo infinitesimal, paralelo ao fio retilíneo de fonte, em uma posição genérica s' e com uma espessura infinitesimal ds', ou seja,

$$d\vec{\boldsymbol{A}} = a\, ds' .$$

Logo, o fluxo fica

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &= \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'} a\, ds' \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{ds'}{s'} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{s(t)}{b}\right] . \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{b + v_0 t}{b}\right]} .$$

■

(c) Começaremos, de fato, com o sentido da corrente induzida. Como, nitidamente, o módulo do fluxo magnético cresce, com o movimento da barra, é óbvio, pela lei de Lenz, que deverá surgir um campo magnético induzido de sentido o mais oposto possível àquele já pré-existente, devido ao fio infinito retilíneo. Concretamente, pois, o sentido da corrente induzida deve ser o **anti-horário**.

Quanto ao módulo, basta calcularmos a derivada temporal do fluxo do item (b) e dividirmos pela resistência R da barra; ou seja,

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{\mathscr{E}}{R} \\ &= \frac{|d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}/dt|}{R} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\frac{\dot{s}}{s} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\frac{v_0}{b + v_0 t}} .$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2013/1 – Prova Final: 19/07/2013
Versão: $\boxed{\text{B}}$

Formulário

$$\vec{F}_\text{e} = q\vec{E}\,, \qquad \vec{E} = k_0\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_\text{int}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

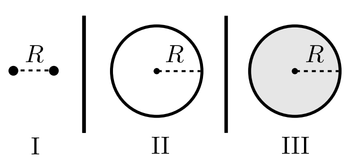
$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \qquad I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot d\vec{A}\,, \qquad \vec{J} = nq\vec{v}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{F}_\text{m} = q\vec{v}\times\vec{B}\,, \qquad d\vec{F}_\text{m} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}\,, \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,, \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\,,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_\text{enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_\text{ind} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{B}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,;$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

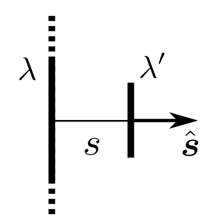
1. Considere o trabalho realizado pelas forças elétricas nas seguintes três situações: (I) duas partículas, de mesma carga elétrica Q, são trazidas de uma distância infinita até uma distância R (entre si); (II) uma casca esférica (superficial), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito, e (III) uma esfera (sólida), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída em seu volume, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito. O que se pode afirmar sobre tais trabalhos, W_i ($i =$ I, II, III)?



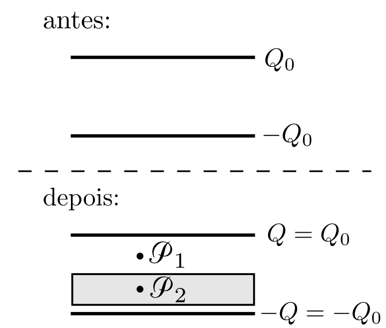
   (a) $W_\text{II} < W_\text{III} < W_\text{I}$.
   (b) $W_\text{II} > W_\text{III} > W_\text{I}$.
   (c) $W_\text{I} > W_\text{II} > W_\text{III}$.
   (d) $W_\text{I} < W_\text{II} < W_\text{III}$.
   (e) $W_\text{III} > W_\text{I} > W_\text{II}$.
   (f) $W_\text{III} < W_\text{I} < W_\text{II}$.

2. Temos dois fios retilíneos, finos, paralelos. Um deles é muito longo (supostamente infinito) e o outro tem comprimento L. O fio infinito tem uma densidade linear de carga λ, ao passo que o fio finito tem uma densidade linear de carga λ', ambas constantes. Sabendo que o campo elétrico do fio muito longo, em um ponto qualquer a uma distância s dele, é $\vec{E} = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 s)\,\hat{s}$, qual é a força elétrica do fio infinito sobre o finito?

   (a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{s}$.
   (b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{s}$.
   (c) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda'}{sL}\,\hat{s}$.
   (d) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{s}$.
   (e) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{s}$.

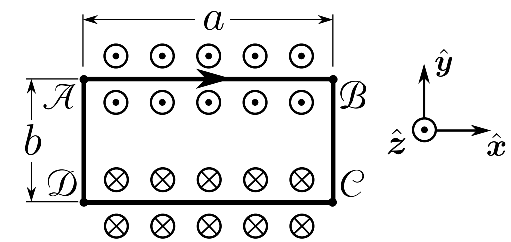


3. Considere um capacitor ideal de placas quadradas, planas e paralelas. Mantendo-se a carga de cada placa constante, uma chapa espessa de isolante, é inserida na região entre as placas do capacitor original. Sendo E_0 o módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor original, e E_i ($i = 1, 2$) os módulos do campo elétrico, nos pontos $\mathscr{P}_i$ ($i = 1, 2$), após a introdução do isolante, o que pode ser afirmado sobre tais módulos?



   (a) $E_0 < E_1 < E_2$.
   (b) $E_0 > E_1 > E_2$.
   (c) $E_0 > E_2 > E_1$.
   (d) $E_0 < E_2 < E_2$.
   (e) $E_0 = E_2 < E_1$.
   (f) $E_0 = E_2 > E_1$.
   (g) $E_0 = E_1 > E_2$.
   (h) $E_0 = E_1 < E_2$.

4. Um circuito retangular $\mathcal{ABCD}$, de comprimento a e largura b, é percorrido por uma corrente elétrica estacionária, de intensidade I. Os seus lados paralelos $\mathcal{AB}$ e $\mathcal{CD}$ estão sujeitos a campos magnéticos constantes (estacionários e uniformes) iguais a, respectivamente, $\vec{B}_{\mathcal{AB}} = B_0\,\hat{z}$ ($B_0 =$ const) e $\vec{B}_{\mathcal{CD}} = -\vec{B}_{\mathcal{AB}}$. Qual é a força magnética resultante sobre o circuito?

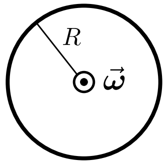


   (a) $2IB_0 a\,\hat{y}$.
   (b) $-2IB_0 a\,\hat{y}$.
   (c) $-2IB_0 b\,\hat{y}$.
   (d) $2IB_0 b\,\hat{y}$.
   (e) $IB_0(a+b)\,\hat{y}$.
   (f) $\vec{0}$.

5. Um próton e um elétron se movem, paralelamente, com velocidades (vetoriais) constantes iguais e de módulo muito pequeno. A força elétrica entre eles é atrativa ou repulsiva? E a força magnética? E a força eletromagnética resultante (elétrica + magnética)?

   (a) Atrativa. Atrativa. Atrativa.
   (b) Atrativa. Atrativa. Repulsiva.
   (c) Atrativa. Repulsiva. Atrativa.
   (d) Atrativa. Repulsiva. Repulsiva.
   (e) Repulsiva. Repulsiva. Repulsiva.
   (f) Atrativa. Nula. Atrativa.

6. Um anel circular, de raio R, possui carga total Q, uniformemente distribuída. Tal anel é colocado para girar, com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante, orientada ao longo do eixo de simetria perpendicular ao seu plano. Qual é, então, o campo magnético no centro do anel?



(a) $\dfrac{\mu_0 Q}{2\pi R}\vec{\omega}$.

(b) $\dfrac{\mu_0 Q}{2R}\vec{\omega}$.

(c) $\dfrac{\mu_0 Q}{4R}\vec{\omega}$.

(d) $\dfrac{\mu_0 Q}{R}\vec{\omega}$.

(e) $\dfrac{\mu_0 Q}{\pi R}\vec{\omega}$.

(f) $\dfrac{\mu_0 Q}{4\pi R}\vec{\omega}$.

7. Em um intervalo de tempo $0 < t_1 < t < t_2$, com t_1 e t_2 constantes, um anel circular tem seu raio variando como: $R(t) = At$, onde A é uma constante positiva. Perpendicular ao plano do anel, existe um campo magnético estacionário, mas não uniforme, cujo módulo, no plano do anel, varia como: $B(r) = Cr$, onde C é uma constante positiva e r é a distância até o centro do anel. Qual é o módulo da força eletromotriz induzida ao longo do anel, durante o intervalo de tempo acima mencionado?

(a) $2\pi C A^3 t^2$.

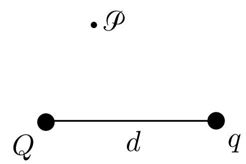
(b) $3\pi C A^3 t^2$.

(c) $C A^3 t^3$.

(d) $2 C A^3 t^2$.

(e) $3 C A^3 t^2$.

8. Duas partículas, de cargas Q e q ($Q \neq q$), separadas por uma distancia d, produzem um potencial $V(\mathscr{P}) = 0$ no ponto $\mathscr{P}$, sendo o potencial também igual a zero no infinito. Isso significa necessariamente que:



(a) não há força elétrica atuando em uma partícula de teste carregada situada no ponto $\mathscr{P}$.

(b) Q e q devem ter o mesmo sinal.

(c) o campo elétrico tem que ser nulo no ponto $\mathscr{P}$.

(d) o trabalho para trazer a partícula de carga Qdo infinito para uma distância d da partícula de carga q é zero.

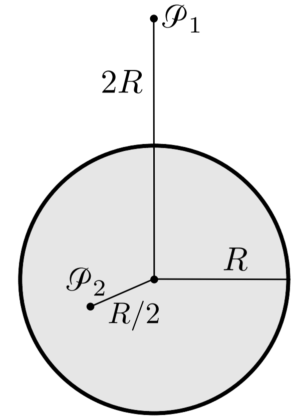
(e) o trabalho realizado pela força elétrica ao trazer uma partícula de teste carregada do infinito para o ponto $\mathscr{P}$ é zero.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. [2,6 pontos] Uma esfera (sólida), de raio R e carga total Q, possui densidade volumar de carga dada por

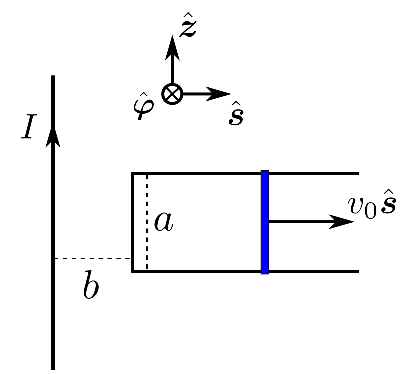
$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) ,$$

onde ρ_0 é uma constante e r é a usual coordenada radial, medida a partir do centro da esfera.



(a) Deduza uma expressão para Q como função de ρ_0 e R. [0,6 ponto]
(b) Determine o campo elétrico nas duas regiões típicas do espaço: $0 \le r \le R$ e $R \le r < \infty$. [1,0 ponto]
(c) Determine a diferença de potencial, $V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1)$, entre os pontos $\mathscr{P}_1 = (2R, \theta_1, \varphi_1)$ e $\mathscr{P}_2 = (R/2, \theta_2, \varphi_2)$. [1,0 ponto]

2. [2,6 pontos] Um fio retilíneo, fino, muito longo, transporta uma corrente estacionária, de intensidade I. A uma distância b do fio, há um circuito composto por fios condutores ideais (sem resistência) e uma barra deslizante, de comprimento a, também condutora, com resistência R. No instante $t = 0$, a barra se encontra no início do circuito (portanto, à distância b do fio), e é, então, puxada para a direita, com uma velocidade constante $v_0\hat{\boldsymbol{s}}$.



(a) Deduza o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, devido ao fio retilíneo, em um ponto arbitrário, de coordenadas cilíndricas (s, φ, z). [0,6 ponto]
(b) Determine o fluxo do campo magnético através do circuito como função do tempo. [1,0 ponto]
(c) Determine o módulo e o sentido da corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{B}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. (a)
2. (d)
3. (g)
4. (b)
5. (c)
6. (f)
7. (a)
8. (e)

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) Por definição,

$$dQ(r) = \rho(r) d\mathcal{V} \, ,$$

onde

$$\rho = \rho_0 \left(1 - r/R\right) \, .$$

Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), podemos escolher de trabalhar direto com a carga dentro de uma casca esférica, de raio interno r e espessura (infinitesimal) dr, cujo volume (infinitesimal) é, pois,

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr \, .$$

Logo, a carga (infinitesimal) correspondente é

$$dQ = 4\pi\rho_0 \left(r^2 - r^3/R\right) dr \, ,$$

de modo que a carga total na esfera é

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\rho_0 \int_{r=0}^{R} \left(r^2 - r^3/R\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{R} \, , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3 \, .}$$

■

(b) Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), convém utilizar coordenadas esféricas (r, θ, φ) e o campo elétrico só terá componente radial E_r, sendo esta dependente unicamente da coordenada r, ou seja,[2]

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\, \hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \varphi) \, .$$

Usaremos, agora, a lei de Gauss. Como o módulo do campo elétrico só depende da distância até o centro da distribuição e a sua direção é radial, somos levados a escolher como superfície gaussiana a superfície $\mathcal{S}$ de uma esfera genérica, de raio r, que passa pelo ponto genérico $\mathcal{P}$ onde queremos calcular o campo. Com isso, por definição de fluxo, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}[\mathcal{S}] &:= \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \oint_{\mathcal{S}} E_r(r) \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dA \\ &= E_r(r) \oint_{\mathcal{S}} dA \\ &= 4\pi r^2 E_r(r) \, . \end{aligned}$$

Por outro lado, devemos calcular a carga Q_{int}, no interior da gaussiana, para as duas regiões típicas do espaço.

- $\underline{R \leq r < \infty}$:
  Aqui, obviamente, a carga encerrada é a carga total da esfera:

  $$Q_{\text{int}} = Q \, .$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \, ,$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \, .}$$

- $\underline{0 \leq r \leq R}$:
  Aqui, a carga encerrada é aquela dada por uma integral definida semelhante à do item (a), exceto pelo limite superior, que agora vale $r < R$ e *não* R (pois estamos dentro da distribuição de carga). Logo,

  $$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^{r} \left(r'^2 - r'^3/R\right) dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right) \, . \end{aligned}$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{4}\frac{r^2}{R}\right)$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}} \, ,}$$

  ou

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R^3}\hat{\boldsymbol{r}} \, .}$$

Coligindo os resultados, temos, ainda, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^3}\left(4 - 3\dfrac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \, . \end{cases}$$

■

[2] Note, *en passant*, que o campo em si depende das três coordenadas: de r, por intermédio da componente E_r, e de θ e φ, por intermédio do versor $\hat{\boldsymbol{r}}$.

(c) Por definição,

$$dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}\,.$$

Logo, integrando desde $\mathscr{P}_1$ até $\mathscr{P}_2$, temos

$$\begin{aligned}
V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) &= -\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= -\int_{r=2R}^{R} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} - \int_{r=R}^{R/2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= -\int_{r=2R}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr - \int_{r=R}^{R/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right) r\,dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=2R}^{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2r^2 - \frac{r^3}{R}\right)\Bigg|_{r=R}^{R/2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) = \frac{9Q}{32\pi\varepsilon_0 R}}\,.$$

■

2. **Resolução:**

(a) Devido à simetria cilíndrica da distribuição de corrente estacionária, suplementada pela lei de Gauss do magnetismo e condições de contorno apropriadas, temos que

$$\vec{\boldsymbol{B}}(s,\varphi) = B_\varphi(s)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso sugere que, na aplicação da lei de Ampère para determinação do campo magnético, escolhamos como curva ampèriana uma circunferência de círculo $\mathscr{C}$, de raio s, coaxial com o eixo da corrente. Ao longo dela, a circulação do campo magnético é, pois,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{C}] &:= \oint_{\mathscr{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= \oint_{\mathscr{C}} B_\varphi(s) d\ell_\varphi \\
&= B_\varphi \oint_{\mathscr{C}} d\ell_\varphi \\
&= 2\pi s B_\varphi(s)\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a corrente encerrada é

$$I_{\text{enc}} = I\,.$$

Logo, pela lei de Ampère, temos

$$B_\varphi(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,,$$

ou

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}\,.$$

■

(b) Em um determinado instante t, a barra se encontra na posição radial

$$s(t) = b + v_0 t\,.$$

Nesse instante, o circuito completo encontra-se imerso no campo magnético *não* uniforme, devido ao fio retilíneo infinito, de modo que o correspondente fluxo através da superfície retangular $\mathscr{S}$ definida pelo circuito envolve uma integral de superfície não trivial, dada por

$$\begin{aligned}
\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &:= \int_{\mathscr{S}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\
&= \int_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,.
\end{aligned}$$

Qual é o vetor $d\vec{\boldsymbol{A}}$? Naturalmente, pode ser tomado como aquele associado a um retângulo infinitesimal, paralelo ao fio retilíneo de fonte, em uma posição genérica s' e com uma espessura infinitesimal ds', ou seja,

$$d\vec{\boldsymbol{A}} = a\,ds'\,.$$

Logo, o fluxo fica

$$\begin{aligned}
\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &= \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'} a\,ds' \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{s'=b}^{s(t)} \frac{ds'}{s'} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left[\frac{s(t)}{b}\right].
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left[\frac{b + v_0 t}{b}\right]}\,.$$

■

(c) Começaremos, de fato, com o sentido da corrente induzida. Como, nitidamente, o módulo do fluxo magnético cresce, com o movimento da barra, é óbvio, pela lei de Lenz, que deverá surgir um campo magnético induzido de sentido o mais oposto possível àquele já pré-existente, devido ao fio infinito retilíneo. Concretamente, pois, o sentido da corrente induzida deve ser o **anti-horário**.

Quanto ao módulo, basta calcularmos a derivada temporal do fluxo do item (b) e dividirmos pela resistência R da barra; ou seja,

$$\begin{aligned}
I_{\text{ind}} &= \frac{\mathscr{E}}{R} \\
&= \frac{|d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}/dt|}{R} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\,\frac{\dot{s}}{s}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\,\frac{v_0}{b + v_0 t}}\,.$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2013/1 – Prova Final: 19/07/2013
Versão: $\boxed{\text{C}}$

Formulário

$$\vec{F}_e = q\vec{E}\,, \qquad \vec{E} = k_0\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

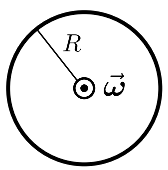
$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \qquad I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot d\vec{A}\,, \qquad \vec{J} = nq\vec{v}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}\,, \qquad d\vec{F}_m = Id\vec{\ell}\times\vec{B}\,, \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,, \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\,,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{B}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,;$$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Um anel circular, de raio R, possui carga total Q, uniformemente distribuída. Tal anel é colocado para girar, com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante, orientada ao longo do eixo de simetria perpendicular ao seu plano. Qual é, então, o campo magnético no centro do anel?



(a) $\dfrac{\mu_0 Q}{2\pi R}\vec{\omega}$.

(b) $\dfrac{\mu_0 Q}{2R}\vec{\omega}$.

(c) $\dfrac{\mu_0 Q}{4R}\vec{\omega}$.

(d) $\dfrac{\mu_0 Q}{R}\vec{\omega}$.

(e) $\dfrac{\mu_0 Q}{\pi R}\vec{\omega}$.

(f) $\dfrac{\mu_0 Q}{4\pi R}\vec{\omega}$.

2. Um próton e um elétron se movem, paralelamente, com velocidades (vetoriais) constantes iguais e de módulo muito pequeno. A força elétrica entre eles é atrativa ou repulsiva? E a força magnética? E a força eletromagnética resultante (elétrica + magnética)?

(a) Atrativa. Atrativa. Atrativa.

(b) Atrativa. Atrativa. Repulsiva.

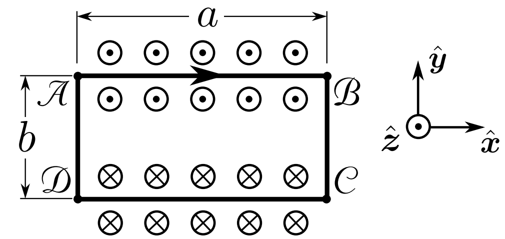
(c) Atrativa. Repulsiva. Atrativa.

(d) Atrativa. Repulsiva. Repulsiva.

(e) Repulsiva. Repulsiva. Repulsiva.

(f) Atrativa. Nula. Atrativa.

3. Um circuito retangular $\mathcal{ABCD}$, de comprimento a e largura b, é percorrido por uma corrente elétrica estacionária, de intensidade I. Os seus lados paralelos $\mathcal{AB}$ e $\mathcal{CD}$ estão sujeitos a campos magnéticos constantes (estacionários e uniformes) iguais a, respectivamente, $\vec{B}_{\mathcal{AB}} = B_0\,\hat{z}$ ($B_0 = \text{const}$) e $\vec{B}_{\mathcal{CD}} = -\vec{B}_{\mathcal{AB}}$. Qual é a força magnética resultante sobre o circuito?



(a) $2IB_0 a\,\hat{y}$.

(b) $-2IB_0 a\,\hat{y}$.

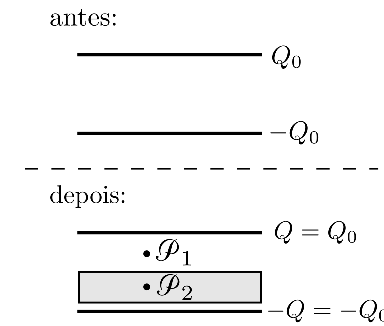
(c) $-2IB_0 b\,\hat{y}$.

(d) $2IB_0 b\,\hat{y}$.

(e) $IB_0(a+b)\,\hat{y}$.

(f) $\vec{0}$.

4. Considere um capacitor ideal de placas quadradas, planas e paralelas. Mantendo-se a carga de cada placa constante, uma chapa espessa de isolante, é inserida na região entre as placas do capacitor original. Sendo E_0 o módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor original, e E_i ($i = 1, 2$) os módulos do campo elétrico, nos pontos $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, 2$), após a introdução do isolante, o que pode ser afirmado sobre tais módulos?



(a) $E_0 < E_1 < E_2$.

(b) $E_0 > E_1 > E_2$.

(c) $E_0 > E_2 > E_1$.

(d) $E_0 < E_2 < E_2$.

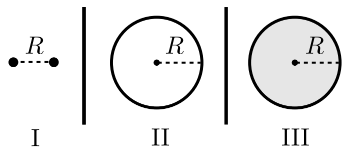
(e) $E_0 = E_2 < E_1$.

(f) $E_0 = E_2 > E_1$.

(g) $E_0 = E_1 > E_2$.

(h) $E_0 = E_1 < E_2$.

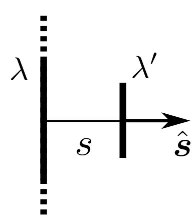
5. Considere o trabalho realizado pelas forças elétricas nas seguintes três situações: (I) duas partículas, de mesma carga elétrica Q, são trazidas de uma distância infinita até uma distância R (entre si); (II) uma casca esférica (superficial), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito, e (III) uma esfera (sólida), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída em seu volume, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito. O que se pode afirmar sobre tais trabalhos, W_i (i = I, II, III)?



(a) $W_{\rm II} < W_{\rm III} < W_{\rm I}$.
(b) $W_{\rm II} > W_{\rm III} > W_{\rm I}$.
(c) $W_{\rm I} > W_{\rm II} > W_{\rm III}$.
(d) $W_{\rm I} < W_{\rm II} < W_{\rm III}$.
(e) $W_{\rm III} > W_{\rm I} > W_{\rm II}$.
(f) $W_{\rm III} < W_{\rm I} < W_{\rm II}$.

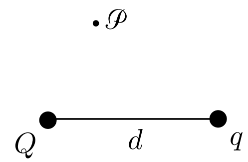
6. Temos dois fios retilíneos, finos, paralelos. Um deles é muito longo (supostamente infinito) e o outro tem comprimento L. O fio infinito tem uma densidade linear de carga λ, ao passo que o fio finito tem uma densidade linear de carga λ', ambas constantes. Sabendo que o campo elétrico do fio muito longo, em um ponto qualquer a uma distância s dele, é $\vec{\boldsymbol{E}} = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 s)\,\hat{\boldsymbol{s}}$, qual é a força elétrica do fio infinito sobre o finito?

(a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
(b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
(c) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda'}{sL}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
(d) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
(e) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.



Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

7. Duas partículas, de cargas Q e q ($Q \neq q$), separadas por uma distancia d, produzem um potencial $V(\mathscr{P}) = 0$ no ponto $\mathscr{P}$, sendo o potencial também igual a zero no infinito. Isso significa necessariamente que:



(a) não há força elétrica atuando em uma partícula de teste carregada situada no ponto $\mathscr{P}$.
(b) Q e q devem ter o mesmo sinal.
(c) o campo elétrico tem que ser nulo no ponto $\mathscr{P}$.
(d) o trabalho para trazer a partícula de carga Qdo infinito para uma distância d da partícula de carga q é zero.
(e) o trabalho realizado pela força elétrica ao trazer uma partícula de teste carregada do infinito para o ponto $\mathscr{P}$ é zero.

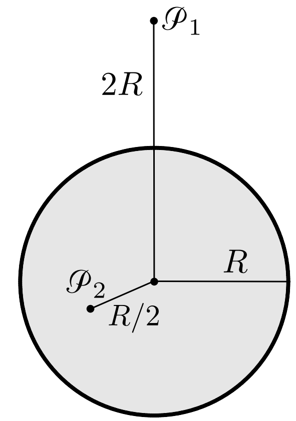
8. Em um intervalo de tempo $0 < t_1 < t < t_2$, com t_1 e t_2 constantes, um anel circular tem seu raio variando como: $R(t) = At$, onde A é uma constante positiva. Perpendicular ao plano do anel, existe um campo magnético estacionário, mas não uniforme, cujo módulo, no plano do anel, varia como: $B(r) = Cr$, onde C é uma constante positiva e r é a distância até o centro do anel. Qual é o módulo da força eletromotriz induzida ao longo do anel, durante o intervalo de tempo acima mencionado?

(a) $2\pi CA^3t^2$.
(b) $3\pi CA^3t^2$.
(c) CA^3t^3.
(d) $2CA^3t^2$.
(e) $3CA^3t^2$.

1. [2,6 pontos] Uma esfera (sólida), de raio R e carga total Q, possui densidade volumar de carga dada por

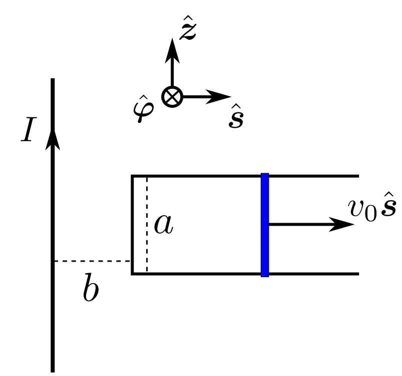
$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

onde ρ_0 é uma constante e r é a usual coordenada radial, medida a partir do centro da esfera.



(a) Deduza uma expressão para Q como função de ρ_0 e R. [0,6 ponto]
(b) Determine o campo elétrico nas duas regiões típicas do espaço: $0 \leq r \leq R$ e $R \leq r < \infty$. [1,0 ponto]
(c) Determine a diferença de potencial, $V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1)$, entre os pontos $\mathscr{P}_1 = (2R, \theta_1, \varphi_1)$ e $\mathscr{P}_2 = (R/2, \theta_2, \varphi_2)$. [1,0 ponto]

2. [2,6 pontos] Um fio retilíneo, fino, muito longo, transporta uma corrente estacionária, de intensidade I. A uma distância b do fio, há um circuito composto por fios condutores ideais (sem resistência) e uma barra deslizante, de comprimento a, também condutora, com resistência R. No instante $t = 0$, a barra se encontra no início do circuito (portanto, à distância b do fio), e é, então, puxada para a direita, com uma velocidade constante $v_0\hat{\boldsymbol{s}}$.



(a) Deduza o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, devido ao fio retilíneo, em um ponto arbitrário, de coordenadas cilíndricas (s, φ, z). [0,6 ponto]
(b) Determine o fluxo do campo magnético através do circuito como função do tempo. [1,0 ponto]
(c) Determine o módulo e o sentido da corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. (f)
2. (c)
3. (b)
4. (g)
5. (a)
6. (d)
7. (e)
8. (a)

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) Por definição,

$$dQ(r) = \rho(r) d\mathcal{V} \, ,$$

onde

$$\rho = \rho_0 \left(1 - r/R\right) \, .$$

Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), podemos escolher de trabalhar direto com a carga dentro de uma casca esférica, de raio interno r e espessura (infinitesimal) dr, cujo volume (infinitesimal) é, pois,

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr \, .$$

Logo, a carga (infinitesimal) correspondente é

$$dQ = 4\pi\rho_0 \left(r^2 - r^3/R\right) dr \, ,$$

de modo que a carga total na esfera é

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\rho_0 \int_{r=0}^{R} \left(r^2 - r^3/R\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\Big|_{r=0}^{R} \, , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3 \, .}$$

■

(b) Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), convém utilizar coordenadas esféricas (r, θ, φ) e o campo elétrico só terá componente radial E_r, sendo esta dependente unicamente da coordenada r, ou seja,[3]

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \varphi) = E_r(r) \, \hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \varphi) \, .$$

Usaremos, agora, a lei de Gauss. Como o módulo do campo elétrico só depende da distância até o centro da distribuição e a sua direção é radial, somos levados a escolher como superfície gaussiana a superfície $\mathcal{S}$ de uma esfera genérica, de raio r, que passa pelo ponto genérico $\mathcal{P}$ onde queremos calcular o campo. Com isso, por definição de fluxo, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}}[\mathcal{S}] &:= \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \oint_{\mathcal{S}} E_r(r) \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dA \\ &= E_r(r) \oint_{\mathcal{S}} dA \\ &= 4\pi r^2 E_r(r) \, . \end{aligned}$$

Por outro lado, devemos calcular a carga $Q_{\rm int}$, no interior da gaussiana, para as duas regiões típicas do espaço.

- $\underline{R \leq r < \infty}$:
  Aqui, obviamente, a carga encerrada é a carga total da esfera:

  $$Q_{\rm int} = Q \, .$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \, ,$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \, .}$$

- $\underline{0 \leq r \leq R}$:
  Aqui, a carga encerrada é aquela dada por uma integral definida semelhante à do item (a), exceto pelo limite superior, que agora vale $r < R$ e *não* R (pois estamos dentro da distribuição de carga). Logo,

  $$\begin{aligned} Q_{\rm int} &= 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^{r} \left(r'^2 - r'^3/R\right) dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right) \, . \end{aligned}$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{4}\frac{r^2}{R}\right)$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{r}{R}\right) r \, \hat{\boldsymbol{r}} \, ,}$$

  ou

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R^3}\hat{\boldsymbol{r}} \, .}$$

Coligindo os resultados, temos, ainda, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^3}\left(4 - 3\dfrac{r}{R}\right) r \, \hat{\boldsymbol{r}} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \, . \end{cases}$$

■

[3]Note, *en passant*, que o campo em si depende das três coordenadas: de r, por intermédio da componente E_r, e de θ e φ, por intermédio do versor $\hat{\boldsymbol{r}}$.

(c) Por definição,

$$dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}\,.$$

Logo, integrando desde $\mathscr{P}_1$ até $\mathscr{P}_2$, temos

$$\begin{aligned} V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) &= -\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= -\int_{r=2R}^{R} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} - \int_{r=R}^{R/2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= -\int_{r=2R}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dr - \int_{r=R}^{R/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right) r\, dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=2R}^{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2r^2 - \frac{r^3}{R}\right)\Bigg|_{r=R}^{R/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) = \frac{9Q}{32\pi\varepsilon_0 R}}\,.$$

■

2. **Resolução:**

(a) Devido à simetria cilíndrica da distribuição de corrente estacionária, suplementada pela lei de Gauss do magnetismo e condições de contorno apropriadas, temos que

$$\vec{\boldsymbol{B}}(s,\varphi) = B_\varphi(s)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso sugere que, na aplicação da lei de Ampère para determinação do campo magnético, escolhamos como curva ampèriana uma circunferência de círculo $\mathscr{C}$, de raio s, coaxial com o eixo da corrente. Ao longo dela, a circulação do campo magnético é, pois,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{C}] &:= \oint_{\mathscr{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\ &= \oint_{\mathscr{C}} B_\varphi(s) d\ell_\varphi \\ &= B_\varphi \oint_{\mathscr{C}} d\ell_\varphi \\ &= 2\pi s B_\varphi(s)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, a corrente encerrada é

$$I_{\text{enc}} = I\,.$$

Logo, pela lei de Ampère, temos

$$B_\varphi(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s},$$

ou

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}\,.$$

■

(b) Em um determinado instante t, a barra se encontra na posição radial

$$s(t) = b + v_0 t\,.$$

Nesse instante, o circuito completo encontra-se imerso no campo magnético *não* uniforme, devido ao fio retilíneo infinito, de modo que o correspondente fluxo através da superfície retangular $\mathscr{S}$ definida pelo circuito envolve uma integral de superfície não trivial, dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &:= \int_{\mathscr{S}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \int_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,. \end{aligned}$$

Qual é o vetor $d\vec{\boldsymbol{A}}$? Naturalmente, pode ser tomado como aquele associado a um retângulo infinitesimal, paralelo ao fio retilíneo de fonte, em uma posição genérica s' e com uma espessura infinitesimal ds', ou seja,

$$d\vec{\boldsymbol{A}} = a\, ds'\,.$$

Logo, o fluxo fica

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &= \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'} a\, ds' \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{ds'}{s'} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{s(t)}{b}\right]\,. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{b + v_0 t}{b}\right]}\,.$$

■

(c) Começaremos, de fato, com o sentido da corrente induzida. Como, nitidamente, o módulo do fluxo magnético cresce, com o movimento da barra, é óbvio, pela lei de Lenz, que deverá surgir um campo magnético induzido de sentido o mais oposto possível àquele já pré-existente, devido ao fio infinito retilíneo. Concretamente, pois, o sentido da corrente induzida deve ser o **anti-horário**.

Quanto ao módulo, basta calcularmos a derivada temporal do fluxo do item (b) e dividirmos pela resistência R da barra; ou seja,

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{\mathscr{E}}{R} \\ &= \frac{|d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}/dt|}{R} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\frac{\dot{s}}{s}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\frac{v_0}{b + v_0 t}}\,.$$

■

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física
Física III – 2013/1 – Prova Final: 19/07/2013
Versão: $\boxed{\text{D}}$

Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm e} = q\vec{\boldsymbol{E}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = k_0\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \;\left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\rm int}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\,, \qquad I = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,;$$

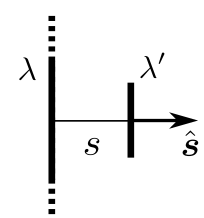
Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Um próton e um elétron se movem, paralelamente, com velocidades (vetoriais) constantes iguais e de módulo muito pequeno. A força elétrica entre eles é atrativa ou repulsiva? E a força magnética? E a força eletromagnética resultante (elétrica + magnética)?

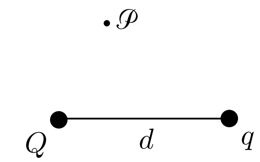
    (a) Atrativa. Atrativa. Atrativa.
    (b) Atrativa. Atrativa. Repulsiva.
    (c) Atrativa. Repulsiva. Atrativa.
    (d) Atrativa. Repulsiva. Repulsiva.
    (e) Repulsiva. Repulsiva. Repulsiva.
    (f) Atrativa. Nula. Atrativa.

2. Temos dois fios retilíneos, finos, paralelos. Um deles é muito longo (supostamente infinito) e o outro tem comprimento L. O fio infinito tem uma densidade linear de carga λ, ao passo que o fio finito tem uma densidade linear de carga λ', ambas constantes. Sabendo que o campo elétrico do fio muito longo, em um ponto qualquer a uma distância s dele, é $\vec{\boldsymbol{E}} = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 s)\,\hat{\boldsymbol{s}}$, qual é a força elétrica do fio infinito sobre o finito?

    (a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
    (b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
    (c) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda'}{sL}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
    (d) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L}{s}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.
    (e) $\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\lambda' L^2}{s^2}\,\hat{\boldsymbol{s}}$.

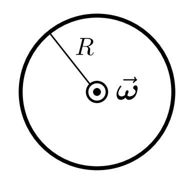


3. Duas partículas, de cargas Q e q ($Q \neq q$), separadas por uma distancia d, produzem um potencial $V(\mathscr{P}) = 0$ no ponto $\mathscr{P}$, sendo o potencial também igual a zero no infinito. Isso significa necessariamente que:



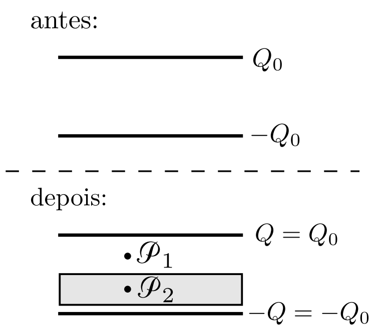
    (a) não há força elétrica atuando em uma partícula de teste carregada situada no ponto $\mathscr{P}$.
    (b) Q e q devem ter o mesmo sinal.
    (c) o campo elétrico tem que ser nulo no ponto $\mathscr{P}$.
    (d) o trabalho para trazer a partícula de carga Qdo infinito para uma distância d da partícula de carga q é zero.
    (e) o trabalho realizado pela força elétrica ao trazer uma partícula de teste carregada do infinito para o ponto $\mathscr{P}$ é zero.

4. Um anel circular, de raio R, possui carga total Q, uniformemente distribuída. Tal anel é colocado para girar, com velocidade angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ constante, orientada ao longo do eixo de simetria perpendicular ao seu plano. Qual é, então, o campo magnético no centro do anel?



    (a) $\dfrac{\mu_0 Q}{2\pi R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
    (b) $\dfrac{\mu_0 Q}{2R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
    (c) $\dfrac{\mu_0 Q}{4R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
    (d) $\dfrac{\mu_0 Q}{R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
    (e) $\dfrac{\mu_0 Q}{\pi R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.
    (f) $\dfrac{\mu_0 Q}{4\pi R}\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

5. Considere um capacitor ideal de placas quadradas, planas e paralelas. Mantendo-se a carga de cada placa constante, uma chapa espessa de isolante, é inserida na região entre as placas do capacitor original. Sendo E_0 o módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor original, e E_i ($i = 1, 2$) os módulos do campo elétrico, nos pontos $\mathscr{P}_i$ ($i = 1, 2$), após a introdução do isolante, o que pode ser afirmado sobre tais módulos?

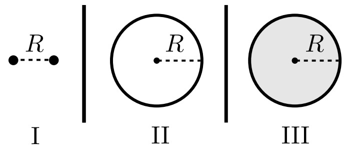


    (a) $E_0 < E_1 < E_2$.
    (b) $E_0 > E_1 > E_2$.
    (c) $E_0 > E_2 > E_1$.
    (d) $E_0 < E_2 < E_2$.
    (e) $E_0 = E_2 < E_1$.
    (f) $E_0 = E_2 > E_1$.
    (g) $E_0 = E_1 > E_2$.
    (h) $E_0 = E_1 < E_2$.

6. Em um intervalo de tempo $0 < t_1 < t < t_2$, com t_1 e t_2 constantes, um anel circular tem seu raio variando como: $R(t) = At$, onde A é uma constante positiva. Perpendicular ao plano do anel, existe um campo magnético estacionário, mas não uniforme, cujo módulo, no plano do anel, varia como: $B(r) = Cr$, onde C é uma constante positiva e r é a distância até o centro do anel. Qual é o módulo da força eletromotriz induzida ao longo do anel, durante o intervalo de tempo acima mencionado?

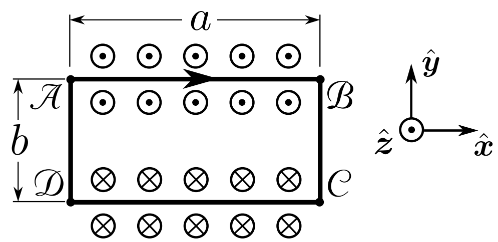
    (a) $2\pi CA^3t^2$.
    (b) $3\pi CA^3t^2$.
    (c) CA^3t^3.
    (d) $2CA^3t^2$.
    (e) $3CA^3t^2$.

7. Considere o trabalho realizado pelas forças elétricas nas seguintes três situações: (I) duas partículas, de mesma carga elétrica Q, são trazidas de uma distância infinita até uma distância R (entre si); (II) uma casca esférica (superficial), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito, e (III) uma esfera (sólida), de raio R, com carga Q uniformemente distribuída em seu volume, é montada a partir de partículas, com carga infinitesimal, trazidas do infinito. O que se pode afirmar sobre tais trabalhos, W_i (i = I, II, III)?



(a) $W_{\rm II} < W_{\rm III} < W_{\rm I}$.
(b) $W_{\rm II} > W_{\rm III} > W_{\rm I}$.
(c) $W_{\rm I} > W_{\rm II} > W_{\rm III}$.
(d) $W_{\rm I} < W_{\rm II} < W_{\rm III}$.
(e) $W_{\rm III} > W_{\rm I} > W_{\rm II}$.
(f) $W_{\rm III} < W_{\rm I} < W_{\rm II}$.

8. Um circuito retangular $\mathscr{ABCD}$, de comprimento a e largura b, é percorrido por uma corrente elétrica estacionária, de intensidade I. Os seus lados paralelos $\mathscr{AB}$ e $\mathscr{CD}$ estão sujeitos a campos magnéticos constantes (estacionários e uniformes) iguais a, respectivamente, $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{AB}} = B_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$ (B_0 = const) e $\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{CD}} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{\mathscr{AB}}$. Qual é a força magnética resultante sobre o circuito?



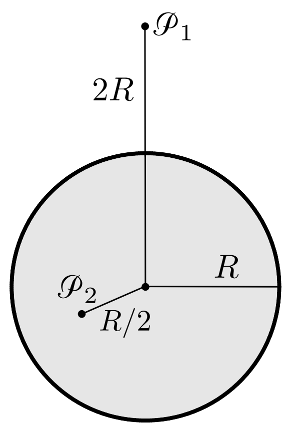
(a) $2IB_0a\,\hat{\boldsymbol{y}}$.
(b) $-2IB_0a\,\hat{\boldsymbol{y}}$.
(c) $-2IB_0b\,\hat{\boldsymbol{y}}$.
(d) $2IB_0b\,\hat{\boldsymbol{y}}$.
(e) $IB_0(a+b)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.
(f) $\vec{\boldsymbol{0}}$.

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. [2,6 pontos] Uma esfera (sólida), de raio R e carga total Q, possui densidade volumar de carga dada por

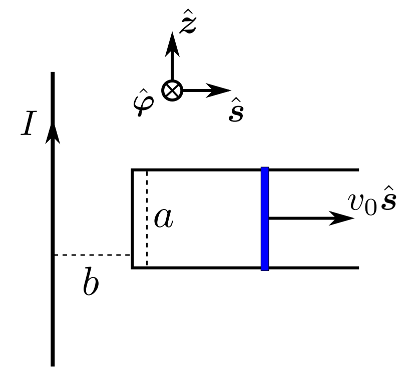
$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) ,$$

onde ρ_0 é uma constante e r é a usual coordenada radial, medida a partir do centro da esfera.



(a) Deduza uma expressão para Q como função de ρ_0 e R. [0,6 ponto]
(b) Determine o campo elétrico nas duas regiões típicas do espaço: $0 \le r \le R$ e $R \le r < \infty$. [1,0 ponto]
(c) Determine a diferença de potencial, $V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1)$, entre os pontos $\mathscr{P}_1 = (2R, \theta_1, \varphi_1)$ e $\mathscr{P}_2 = (R/2, \theta_2, \varphi_2)$. [1,0 ponto]

2. [2,6 pontos] Um fio retilíneo, fino, muito longo, transporta uma corrente estacionária, de intensidade I. A uma distância b do fio, há um circuito composto por fios condutores ideais (sem resistência) e uma barra deslizante, de comprimento a, também condutora, com resistência R. No instante $t = 0$, a barra se encontra no início do circuito (portanto, à distância b do fio), e é, então, puxada para a direita, com uma velocidade constante $v_0\hat{\boldsymbol{s}}$.



(a) Deduza o campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, devido ao fio retilíneo, em um ponto arbitrário, de coordenadas cilíndricas (s, φ, z). [0,6 ponto]
(b) Determine o fluxo do campo magnético através do circuito como função do tempo. [1,0 ponto]
(c) Determine o módulo e o sentido da corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. (c)
2. (d)
3. (e)
4. (f)
5. (g)
6. (a)
7. (a)
8. (b)

Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. **Resolução:**

(a) Por definição,

$$dQ(r) = \rho(r) d\mathcal{V}\,,$$

onde

$$\rho = \rho_0 \left(1 - r/R\right)\,.$$

Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), podemos escolher de trabalhar direto com a carga dentro de uma casca esférica, de raio interno r e espessura (infinitesimal) dr, cujo volume (infinitesimal) é, pois,

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr\,.$$

Logo, a carga (infinitesimal) correspondente é

$$dQ = 4\pi\rho_0 \left(r^2 - r^3/R\right) dr\,,$$

de modo que a carga total na esfera é

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\rho_0 \int_{r=0}^{R} \left(r^2 - r^3/R\right) dr \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{R}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = \frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3\,.}$$

■

(b) Devido à simetria esférica (da distribuição de carga), convém utilizar coordenadas esféricas (r, θ, φ) e o campo elétrico só terá componente radial E_r, sendo esta dependente unicamente da coordenada r, ou seja,[4]

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \varphi)\,.$$

Usaremos, agora, a lei de Gauss. Como o módulo do campo elétrico só depende da distância até o centro da distribuição e a sua direção é radial, somos levados a escolher como superfície gaussiana a superfície $\mathcal{S}$ de uma esfera genérica, de raio r, que passa pelo ponto genérico $\mathcal{P}$ onde queremos calcular o campo. Com isso, por definição de fluxo, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}[\mathcal{S}] &:= \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= \oint_{\mathcal{S}} E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} dA \\ &= E_r(r) \oint_{\mathcal{S}} dA \\ &= 4\pi r^2 E_r(r)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, devemos calcular a carga Q_{int}, no interior da gaussiana, para as duas regiões típicas do espaço.

- $\underline{R \le r < \infty}$:
  Aqui, obviamente, a carga encerrada é a carga total da esfera:

  $$Q_{\text{int}} = Q\,.$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,,$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,.}$$

- $\underline{0 \le r \le R}$:
  Aqui, a carga encerrada é aquela dada por uma integral definida semelhante à do item (a), exceto pelo limite superior, que agora vale $r < R$ e *não* R (pois estamos dentro da distribuição de carga). Logo,

  $$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= 4\pi\rho_0 \int_{r'=0}^{r} \left(r'^2 - r'^3/R\right) dr' \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}\frac{r^4}{R}\right)\,. \end{aligned}$$

  Logo, pela lei de Gauss,

  $$E_r(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{4}\frac{r^2}{R}\right)$$

  ou seja,

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}}\,,}$$

  ou

  $$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R^3}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,.}$$

Coligindo os resultados, temos, ainda, equivalentemente,

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^3}\left(4 - 3\dfrac{r}{R}\right) r\,\hat{\boldsymbol{r}} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,. \end{cases}$$

■

[4] Note, *en passant*, que o campo em si depende das três coordenadas: de r, por intermédio da componente E_r, e de θ e φ, por intermédio do versor $\hat{\boldsymbol{r}}$.

(c) Por definição,

$$dV = -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}\,.$$

Logo, integrando desde $\mathscr{P}_1$ até $\mathscr{P}_2$, temos

$$\begin{aligned}
V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) &= -\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= -\int_{r=2R}^{R} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} - \int_{r=R}^{R/2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= -\int_{r=2R}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr - \int_{r=R}^{R/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(4 - 3\frac{r}{R}\right) r\,dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=2R}^{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2r^2 - \frac{r^3}{R}\right)\Big|_{r=R}^{R/2}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{V(\mathscr{P}_2) - V(\mathscr{P}_1) = \frac{9Q}{32\pi\varepsilon_0 R}}\,.$$

■

2. **Resolução:**

(a) Devido à simetria cilíndrica da distribuição de corrente estacionária, suplementada pela lei de Gauss do magnetismo e condições de contorno apropriadas, temos que

$$\vec{\boldsymbol{B}}(s,\varphi) = B_\varphi(s)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)\,.$$

Isso sugere que, na aplicação da lei de Ampère para determinação do campo magnético, escolhamos como curva ampèriana uma circunferência de círculo $\mathscr{C}$, de raio s, coaxial com o eixo da corrente. Ao longo dela, a circulação do campo magnético é, pois,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{C}] &:= \oint_{\mathscr{C}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} \\
&= \oint_{\mathscr{C}} B_\varphi(s) d\ell_\varphi \\
&= B_\varphi \oint_{\mathscr{C}} d\ell_\varphi \\
&= 2\pi s B_\varphi(s)\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a corrente encerrada é

$$I_{\text{enc}} = I\,.$$

Logo, pela lei de Ampère, temos

$$B_\varphi(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,,$$

ou

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}\,.$$

■

(b) Em um determinado instante t, a barra se encontra na posição radial

$$s(t) = b + v_0 t\,.$$

Nesse instante, o circuito completo encontra-se imerso no campo magnético *não* uniforme, devido ao fio retilíneo infinito, de modo que o correspondente fluxo através da superfície retangular $\mathscr{S}$ definida pelo circuito envolve uma integral de superfície não trivial, dada por

$$\begin{aligned}
\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &:= \int_{\mathscr{S}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\
&= \int_{\mathscr{S}} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,.
\end{aligned}$$

Qual é o vetor $d\vec{\boldsymbol{A}}$? Naturalmente, pode ser tomado como aquele associado a um retângulo infinitesimal, paralelo ao fio retilíneo de fonte, em uma posição genérica s' e com uma espessura infinitesimal ds', ou seja,

$$d\vec{\boldsymbol{A}} = a\,ds'\,.$$

Logo, o fluxo fica

$$\begin{aligned}
\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] &= \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{\mu_0 I}{2\pi s'} a\,ds' \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{s'=b}^{s(t)} \frac{ds'}{s'} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{s(t)}{b}\right]\,.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[\mathscr{S}] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left[\frac{b + v_0 t}{b}\right]}\,.$$

■

(c) Começaremos, de fato, com o sentido da corrente induzida. Como, nitidamente, o módulo do fluxo magnético cresce, com o movimento da barra, é óbvio, pela lei de Lenz, que deverá surgir um campo magnético induzido de sentido o mais oposto possível àquele já pré-existente, devido ao fio infinito retilíneo. Concretamente, pois, o sentido da corrente induzida deve ser o **anti-horário**.

Quanto ao módulo, basta calcularmos a derivada temporal do fluxo do item (b) e dividirmos pela resistência R da barra; ou seja,

$$\begin{aligned}
I_{\text{ind}} &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\
&= \frac{|d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}/dt|}{R} \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\,\frac{\dot{s}}{s}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\,\frac{v_0}{b + v_0 t}}\,.$$

■