**Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física – Física III – 2013/1**
**Segunda Chamada: 31/07/2013**
**Versão:** $\boxed{\text{C}}$

---

## Formulário

$$\vec{F}_e = q\vec{E}\,, \quad \vec{E} = k_0\frac{q}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}} \;\left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\,, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \quad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \quad C = Q/V\,, \quad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \quad I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A}\,, \quad \vec{J} = nq\vec{v}\,, \quad V = RI\,,$$

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}\,, \quad d\vec{F}_m = Id\vec{\ell}\times\vec{B}\,, \quad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}\,, \quad \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\,, \quad \Phi_{\vec{B}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \quad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,,$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1\,, \quad \text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,.$$

---

## Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

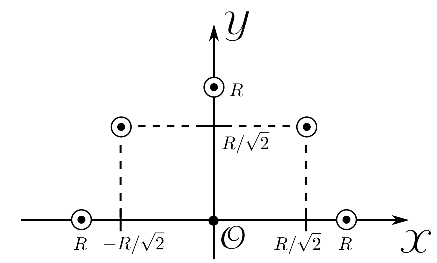
1. Considere as seguintes afirmações: (I) pode haver uma fem induzida não nula em um instante quando o fluxo magnético através de um circuito é igual a zero; (II) a auto-indutância de um solenóide é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) a densidade de energia magnética em algum ponto do espaço é proporcional ao quadrado da magnitude do campo magnético naquele ponto. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?
   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

2. Três finas cascas esféricas condutoras e concêntricas têm raios $a, b$ e $c$, tais que $0 < a < b < c$. A casca interna está descarregada, a casca intermediária tem uma carga $Q$ e a casca externa tem uma carga $-Q$. Considerando que o potencial é zero no infinito, assinale a opção que indica o valor do potencial em cada uma das três cascas.
   (a) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(a) = V(b)$.
   (b) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
   (c) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.
   (d) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(a) = V(b)$.
   (e) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
   (f) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.



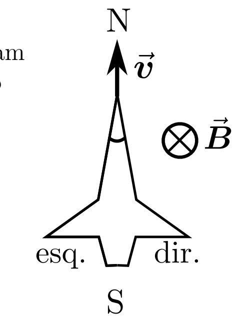
3. Considere as seguintes afirmações: (I) a carga elétrica é uma grandeza contínua (podendo assumir qualquer valor real) e conservada; (II) a lei de Gauss, diferentemente da lei de Coulomb, só vale em situações com distribuição de carga simétrica, e (III) vale um princípio de superposição linear para a força elétrica, o campo elétrico, e o potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?
   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

4. Cinco fios retilíneos, longos e condutores são paralelos ao eixo $\mathcal{Z}$ e cada um conduz uma corrente estacionária de intensidade $I$, com orientação no sentido positivo de $\mathcal{Z}$. Cada um dos fios está a uma distância $R$ do eixo $\mathcal{Z}$. Dois dos fios interceptam o eixo $\mathcal{X}$, um em $x = R$ e o outro em $x = -R$. Outro fio intercepta o eixo $\mathcal{Y}$ em $y = R$. Um dos fios restantes intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ e o último intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Qual é o campo magnético num ponto genérico, de cota $z$, do eixo $\mathcal{Z}$?



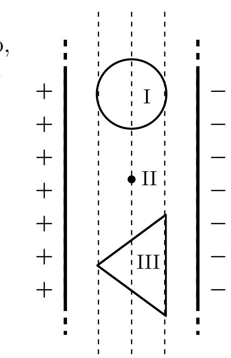

   (a) $\frac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (b) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$.
   (c) $-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$.
   (d) $-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$.
   (e) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$.

5. Em um determinado local da Terra, um avião voa no sentido sul → norte, sujeito a um campo magnético no sentido alto → baixo. Qual de suas asas fica com elétrons em excesso e, como conseqüência, em qual delas o potencial elétrico é maior?




   (a) Ambas as asas continuam neutras e com o mesmo potencial.
   (b) Esquerda e esquerda.
   (c) Esquerda e direita.
   (d) Direita e direita.
   (e) Direita e esquerda.

6. Três corpos de teste, de mesma carga total $Q$, estão situados na região interna de um capacitor ideal de placas planas e paralelas (muito extensas): (I) uma chapa circular, com densidade arbitrária; (II) uma partícula (pontual), e (III) uma chapa triangular, com densidade arbitrária. Assinale a alternativa que melhor indica a ordem entre os módulos das forças elétricas sobre esses três corpos.




   (a) Nada pode ser afirmado, sem informar, explicitamente, as densidades e distâncias.
   (b) $F_I > F_{II} > F_{III}$.
   (c) $F_I < F_{II} < F_{III}$.
   (d) $F_I > F_{III} > F_{II}$.
   (e) $F_I < F_{III} < F_{II}$.
   (f) $F_{II} > F_I > F_{III}$.
   (g) $F_{II} < F_I < F_{III}$.
   (h) $F_I = F_{II} = F_{III}$.

7. Considere as seguintes afirmações: (I) em coordenadas cartesianas usuais, o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{B}} = Cx^2\hat{\boldsymbol{x}}$ não pode, jamais, representar um campo magnético; (II) a lei de Biot-Savart vale para qualquer distribuição de corrente, e (III) um campo elétrico induzido, relacionado com uma variação temporal de um campo magnético, pode ser sempre igualado ao gradiente de um potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

8. Qual é o módulo do campo elétrico dentro de uma chapa espessa, entre os planos cartesianos usuais $z = -L$ e $z = L$ (portanto, de largura $2L$), com densidade (volumar) de carga constante (estacionária e uniforme) $\rho$?

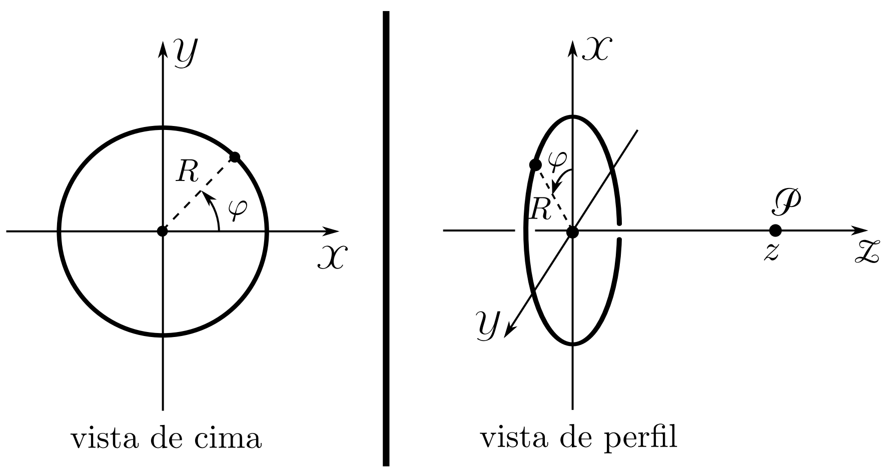
   (a) $|\rho z|/(2\varepsilon_0)$ .
   (b) $2|\rho z|/\varepsilon_0$ .
   (c) $|\rho z|/\varepsilon_0$ .
   (d) $|\rho z|/(2\pi\varepsilon_0)$ .
   (e) $|\rho z|/(4\pi\varepsilon_0)$ .
   (f) $|\rho z|/(\pi\varepsilon_0)$ .

**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. [2,6 pontos] Considere um anel circular, de raio $R$, na origem do plano $\mathcal{XY}$, com uma densidade linear de carga elétrica dada por

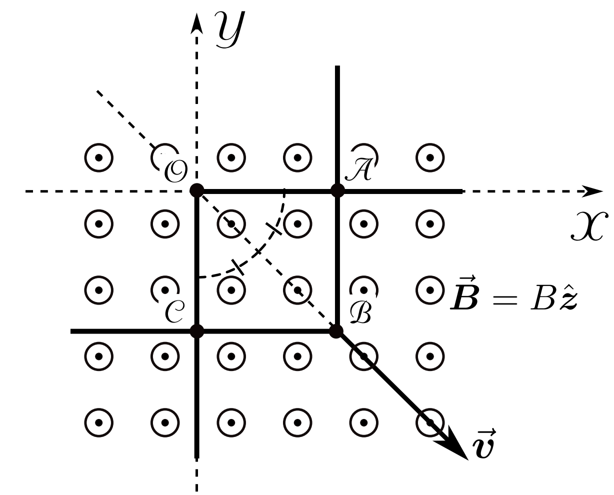
$$\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi\,, & 0 \le \varphi \le \pi\,, \\ 0\,, & \pi \le \varphi < 2\pi\,, \end{cases}$$

onde $\lambda_0 =$ const e $\varphi'$ é o tradicional ângulo polar (no sentido trigonométrico), medido, no plano $\mathcal{XY}$, a partir do eixo $\mathcal{X}$.
(a) Calcule a carga total $Q$ de tal anel. [0,6 ponto]
(b) Determine as três componentes cartesianas usuais $(E_x, E_y, E_z)$ do campo elétrico, devido a tal anel, em um ponto típico $\mathscr{P}$ do seu eixo perpendicular de simetria, com coordenadas $(x = 0, y = 0, z)$. [2,0 pontos]






2. [2,6 pontos] Um condutor ôhmico em forma de L translada-se, rigidamente, com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}$, próximo a um outro condutor ôhmico, fixo, também em forma de L, na presença de um campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ constante (estacionário e uniforme). No instante $t = 0$ s, os dois vértices, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{B}$, coincidem, de forma que a área encerrada é nula. Os condutores têm uma resistência específica (ou seja, *resistência por comprimento*) igual a $r$.




(a) Qual é a orientação (sentido) da corrente induzida no circuito $\mathcal{OABC}$? *Justifique.* [0,6 ponto]
Desprezando a capacitância e a auto-indutância do circuito, determine, em um instante genérico $t > 0$ s,
(b) o fluxo do campo magnético através do circuito. [1,0 ponto]
(c) a corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

# Gabarito para Versão $\boxed{\text{C}}$

**Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)**

1. (f)
2. (a)
3. (d)
4. (e)
5. (e)
6. (h)
7. (b)
8. (c)

**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. **Resolução:**
(a) Por definição de densidade linear de carga elétrica, temos que um elemento infinitesimal do anel, com comprimento infinitesimal $d\ell'$, terá carga infinitesimal dada por

$$dq = \lambda\, d\ell\,.$$

Logo, a carga total do anel será

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\text{anel}} dq \\ &= \int_{\text{anel}} \lambda\, d\ell \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lambda(\varphi) R\, d\varphi' \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi R\, d\varphi \\ &= \lambda_0 R \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = 2\lambda_0 R\,.}$$

Naturalmente, como esperado, se $\lambda_0 > 0$, então a carga total $Q$ do anel, que só está carregado nos dois primeiros quadrantes, é positiva.

■

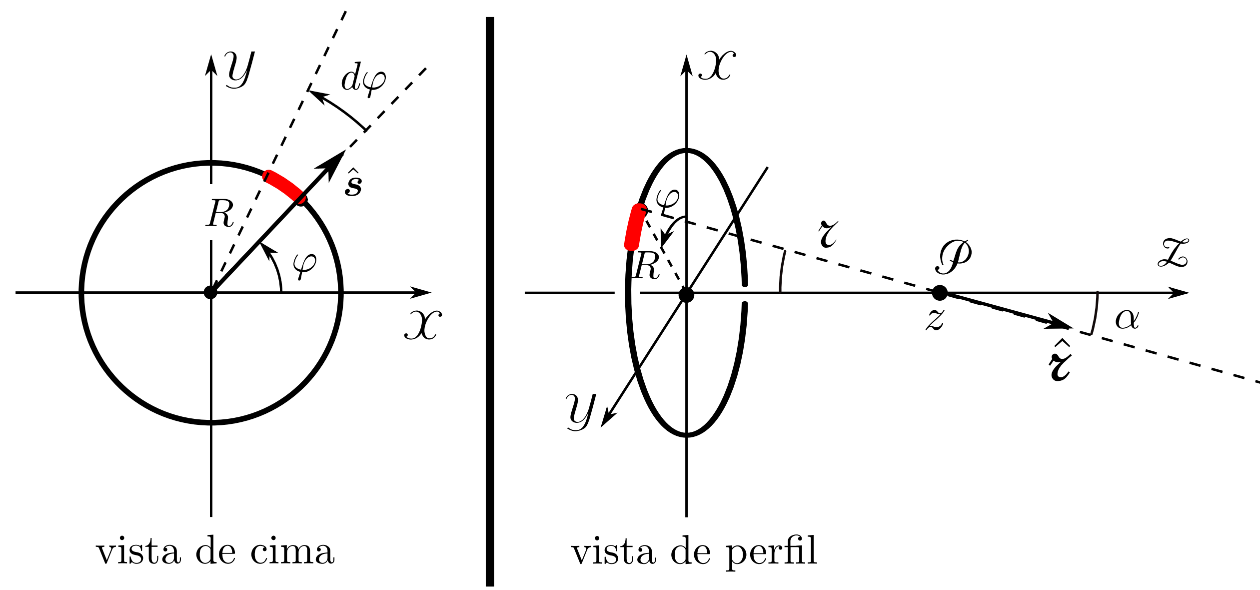
(b) Usaremos a lei de Coulomb e o princípio de superposição (para o campo elétrico). Novamente, escolhemos um elemento infinitesimal de fonte típico no anel, com carga infinitesimal $dq$ e ângulo polar $\varphi$. Este contribui, no ponto $\mathscr{P}(x = 0, y = 0, z)$, com um campo elétrico infinitesimal dado por

$$d\vec{\boldsymbol{E}} = k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,,$$

onde, claro,

$$\mathscr{r}^2 = R^2 = z^2\,.$$






Calcularemos, a partir disso, as três componentes cartesianas.

- $\underline{E_z}$:
Para tanto,

$$\begin{aligned} dE_{\parallel} = dE_z &= d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \\ &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \\ &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha\,, \end{aligned}$$

onde, claro,

$$\cos\alpha = \frac{z}{\mathscr{r}}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_z &= \oint_{\text{anel}} k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha \\ &= k_0 \frac{\cos\alpha}{\mathscr{r}^2} \oint_{\text{anel}} dq\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Q}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,.}$$

- $\underline{E_y \text{ e } E_x}$:
  Para calcularmos tais componentes, projetaremos, primeiro, $d\vec{\boldsymbol{E}}$ no plano $\mathcal{XY}$, para obter

$$
\begin{aligned}
d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp &= \left(d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}\right)\,\hat{\boldsymbol{s}} \\
&= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\boldsymbol{s}}\,.
\end{aligned}
$$

Naturalmente, tal vetor tem direção variável, devido à dependência de $\hat{\boldsymbol{s}}$ com respeito a $\varphi'$. Portanto, devemos projetá-lo, finalmente, nas direções fixas de $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$.

Comecemos pela componente $y$:

$$
\begin{aligned}
dE_y &= d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \\
&= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \\
&= -k_0 \frac{\lambda(\varphi)\,d\ell'}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \\
&= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
E_y &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha \oint_{\text{anel}} \operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi \\
&= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi \\
&= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha \left[\varphi - \frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\pi}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha}
$$

ou

$$
\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\mathfrak{r}^3}}
$$

ou ainda

$$
\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,.}
$$

Vamos agora para a componente $E_x$. Por simetria, ela deve se anular identicamente:

$$
\boxed{E_x = 0\,.}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
E_x &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2}\operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\ ,d\varphi \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

■



2. **Resolução:**

(a) Como o módulo do fluxo magnético através do circuito aumenta com o tempo, deve surgir uma corrente induzida, pela lei de Lenz, que gere, dentro do próprio circuito, um campo magnético("induzido") que se oponha ao campo magnético externo original. Como esse último aponta para fora da página, no sentido $\hat{\boldsymbol{z}}$, o campo magnético "induzido" deve ter sentido $-\hat{\boldsymbol{z}}$, ou seja, a corrente induzida, pela lei de Biot-Savart, deve ter orientação **horário**.

■

(b) Em um dado instante $t > 0$ s, o vértice $\mathcal{B}$ do condutor móvel está na posição $(x(t) = \sqrt{2}vt/2, y(t) = \sqrt{2}vt/2)$, de modo que o circuito $\mathcal{OABC}$ constitui um quadrado que encontra-se totalmente imerso no campo magnético externo constante $\vec{\boldsymbol{B}}$. Assim, o correspondente fluxo magnético será, tomando o versor normal como $\hat{\boldsymbol{z}}$, simplesmente,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} &:= \oint_{\mathcal{OABC}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\
&= BA(t) \\
&= B\left(\sqrt{2}vt/2\right)^2\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} = \frac{1}{2}Bv^2t^2\,.}
$$

■

(c) Tendo em vista que os dois condutores ($\mathcal{COA}$ e $\mathcal{ABC}$) que constituem o circuito são ôhmicos, e que a capacitância e a auto-indutância do circuito são desprezíveis, a intensidade da corrente induzida obedecerá

$$
\begin{aligned}
I_{\text{ind}} &= \frac{|\mathcal{E}_{\text{ind}}|}{R} \\
&= \frac{1}{R}\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,,
\end{aligned}
$$

onde, naturalmente, $R$ é a resistência do circuito.

Como foi informado que o material dos condutores tem resistência específica (resistência por comprimento) igual a $r$, a resistência total do circuito, em um instante $t > 0$ s, é dada por

$$
\begin{aligned}
R &= rL \\
&= r\,4x(t) \\
&= 2\sqrt{2}rvt\,.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, do item (a), temos

$$
\left|\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\right| = Bv^2t\,.
$$

Logo,

$$
I_{\text{ind}} = \frac{Bv}{2\sqrt{2}r}
$$

ou seja,

$$
\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\sqrt{2}Bv}{4r}}
$$

■

**Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física – Física III – 2013/1**
**Segunda Chamada: 31/07/2013**
**Versão:** $\boxed{\text{D}}$

---

## Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{e}} = q\vec{\boldsymbol{E}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = k_0\,\frac{q}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\ \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \qquad I = \int_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{J}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{m}} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{m}} = Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\,,$$

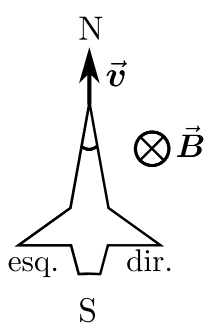
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,,$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1\,, \qquad \text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,.$$

---

### Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Em um determinado local da Terra, um avião voa no sentido sul → norte, sujeito a um campo magnético no sentido alto → baixo. Qual de suas asas fica com elétrons em excesso e, como conseqüência, em qual delas o potencial elétrico é maior?




(a) Ambas as asas continuam neutras e com o mesmo potencial.
(b) Esquerda e esquerda.
(c) Esquerda e direita.
(d) Direita e direita.
(e) Direita e esquerda.

2. Qual é o módulo do campo elétrico dentro de uma chapa espessa, entre os planos cartesianos usuais $z = -L$ e $z = L$ (portanto, de largura $2L$), com densidade (volumar) de carga constante (estacionária e uniforme) $\rho$?

(a) $|\rho z|/(2\varepsilon_0)$.
(b) $2|\rho z|/\varepsilon_0$.
(c) $|\rho z|/\varepsilon_0$.
(d) $|\rho z|/(2\pi\varepsilon_0)$.
(e) $|\rho z|/(4\pi\varepsilon_0)$.
(f) $|\rho z|/(\pi\varepsilon_0)$.



3. Considere as seguintes afirmações: (I) em coordenadas cartesianas usuais, o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{B}} = Cx^2\hat{\boldsymbol{x}}$ não pode, jamais, representar um campo magnético; (II) a lei de Biot-Savart vale para qualquer distribuição de corrente, e (III) um campo elétrico induzido, relacionado com uma variação temporal de um campo magnético, pode ser sempre igualado ao gradiente de um potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

(a) Nenhuma.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
(g) Somente a II e a III.
(h) Todas.

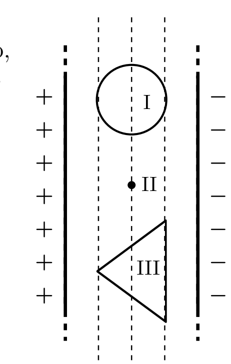
4. Três finas cascas esféricas condutoras e concêntricas têm raios $a, b$ e $c$, tais que $0 < a < b < c$. A casca interna está descarregada, a casca intermediária tem uma carga $Q$ e a casca externa tem uma carga $-Q$. Considerando que o potencial é zero no infinito, assinale a opção que indica o valor do potencial em cada uma das três cascas.

(a) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(a) = V(b)$.
(b) $V(c) = k_0Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
(c) $V(c) = k_0Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.
(d) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(a) = V(b)$.
(e) $V(c) = k_0Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
(f) $V(c) = k_0Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.

5. Considere as seguintes afirmações: (I) a carga elétrica é uma grandeza contínua (podendo assumir qualquer valor real) e conservada; (II) a lei de Gauss, diferentemente da lei de Coulomb, só vale em situações com distribuição de carga simétrica, e (III) vale um princípio de superposição linear para a força elétrica, o campo elétrico, e o potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

(a) Nenhuma.
(b) Somente a I.
(c) Somente a II.
(d) Somente a III.
(e) Somente a I e a II.
(f) Somente a I e a III.
(g) Somente a II e a III.
(h) Todas.

6. Três corpos de teste, de mesma carga total $Q$, estão situados na região interna de um capacitor ideal de placas planas e paralelas (muito extensas): (I) uma chapa circular, com densidade arbitrária; (II) uma partícula (pontual), e (III) uma chapa triangular, com densidade arbitrária. Assinale a alternativa que melhor indica a ordem entre os módulos das forças elétricas sobre esses três corpos.

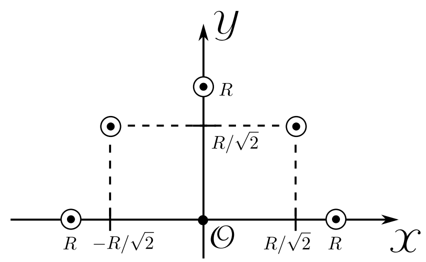



(a) Nada pode ser afirmado, sem informar, explicitamente, as densidades e distâncias.
(b) $F_{\text{I}} > F_{\text{II}} > F_{\text{III}}$.
(c) $F_{\text{I}} < F_{\text{II}} < F_{\text{III}}$.
(d) $F_{\text{I}} > F_{\text{III}} > F_{\text{II}}$.
(e) $F_{\text{I}} < F_{\text{III}} < F_{\text{II}}$.
(f) $F_{\text{II}} > F_{\text{I}} > F_{\text{III}}$.
(g) $F_{\text{II}} < F_{\text{I}} < F_{\text{III}}$.
(h) $F_{\text{I}} = F_{\text{II}} = F_{\text{III}}$.

7. Considere as seguintes afirmações: (I) pode haver uma fem induzida não nula em um instante quando o fluxo magnético através de um circuito é igual a zero; (II) a auto-indutância de um solenóide é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) a densidade de energia magnética em algum ponto do espaço é proporcional ao quadrado da magnitude do campo magnético naquele ponto. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

8. Cinco fios retilíneos, longos e condutores são paralelos ao eixo $\mathcal{Z}$ e cada um conduz uma corrente estacionária de intensidade $I$, com orientação no sentido positivo de $\mathcal{Z}$. Cada um dos fios está a uma distância $R$ do eixo $\mathcal{Z}$. Dois dos fios interceptam o eixo $\mathcal{X}$, um em $x = R$ e o outro em $x = -R$. Outro fio intercepta o eixo $\mathcal{Y}$ em $y = R$. Um dos fios restantes intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ e o último intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Qual é o campo magnético num ponto genérico, de cota $z$, do eixo $\mathcal{Z}$?




   (a) $\dfrac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{z}}\,.$
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{y}}\,.$
   (d) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,.$
   (e) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,.$

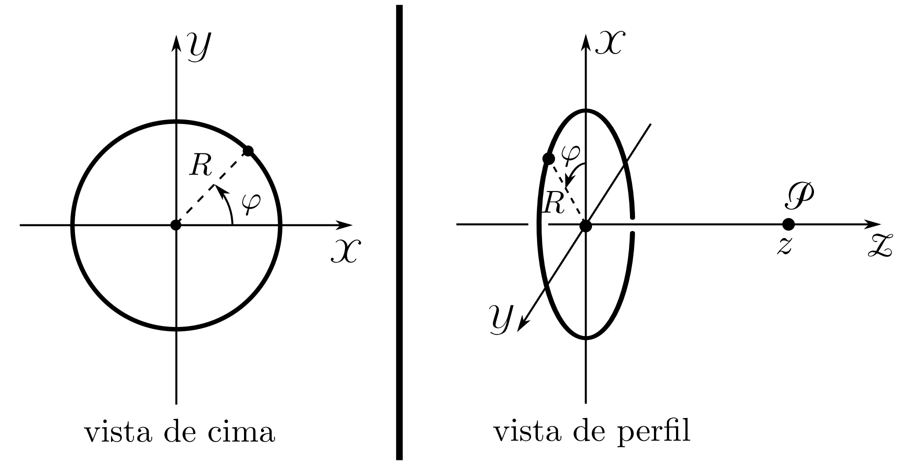
## Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)

1. [2,6 pontos] Considere um anel circular, de raio $R$, na origem do plano $\mathcal{XY}$, com uma densidade linear de carga elétrica dada por

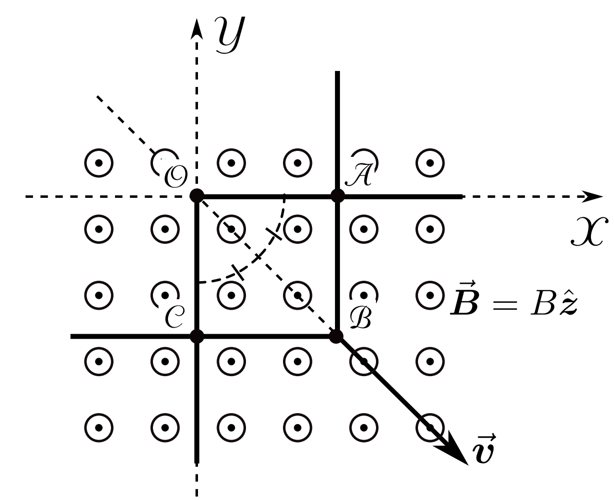
$$\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi\,, & 0 \le \varphi \le \pi\,, \\ 0\,, & \pi \le \varphi < 2\pi\,, \end{cases}$$

onde $\lambda_0 =$ const e $\varphi'$ é o tradicional ângulo polar (no sentido trigonométrico), medido, no plano $\mathcal{XY}$, a partir do eixo $\mathcal{X}$.
(a) Calcule a carga total $Q$ de tal anel. [0,6 ponto]
(b) Determine as três componentes cartesianas usuais $(E_x, E_y, E_z)$ do campo elétrico, devido a tal anel, em um ponto típico $\mathcal{P}$ do seu eixo perpendicular de simetria, com coordenadas $(x = 0, y = 0, z)$. [2,0 pontos]






2. [2,6 pontos] Um condutor ôhmico em forma de L translada-se, rigidamente, com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}$, próximo a um outro condutor ôhmico, fixo, também em forma de L, na presença de um campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ constante (estacionário e uniforme). No instante $t = 0$ s, os dois vértices, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{B}$, coincidem, de forma que a área encerrada é nula. Os condutores têm uma resistência específica (ou seja, *resistência por comprimento*) igual a $r$.




(a) Qual é a orientação (sentido) da corrente induzida no circuito $\mathcal{OABC}$? *Justifique.* [0,6 ponto]
Desprezando a capacitância e a auto-indutância do circuito, determine, em um instante genérico $t > 0$ s,
(b) o fluxo do campo magnético através do circuito. [1,0 ponto]
(c) a corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

# Gabarito para Versão $\boxed{\text{D}}$

**Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)**

1. (e)
2. (c)
3. (b)
4. (a)
5. (d)
6. (h)
7. (f)
8. (e)

**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. **Resolução:**

(a) Por definição de densidade linear de carga elétrica, temos que um elemento infinitesimal do anel, com comprimento infinitesimal $d\ell'$, terá carga infinitesimal dada por

$$dq = \lambda\, d\ell\,.$$

Logo, a carga total do anel será

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\text{anel}} dq \\ &= \int_{\text{anel}} \lambda\, d\ell \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lambda(\varphi) R\, d\varphi' \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi R\, d\varphi \\ &= \lambda_0 R \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = 2\lambda_0 R\,.}$$

Naturalmente, como esperado, se $\lambda_0 > 0$, então a carga total $Q$ do anel, que só está carregado nos dois primeiros quadrantes, é positiva.

■

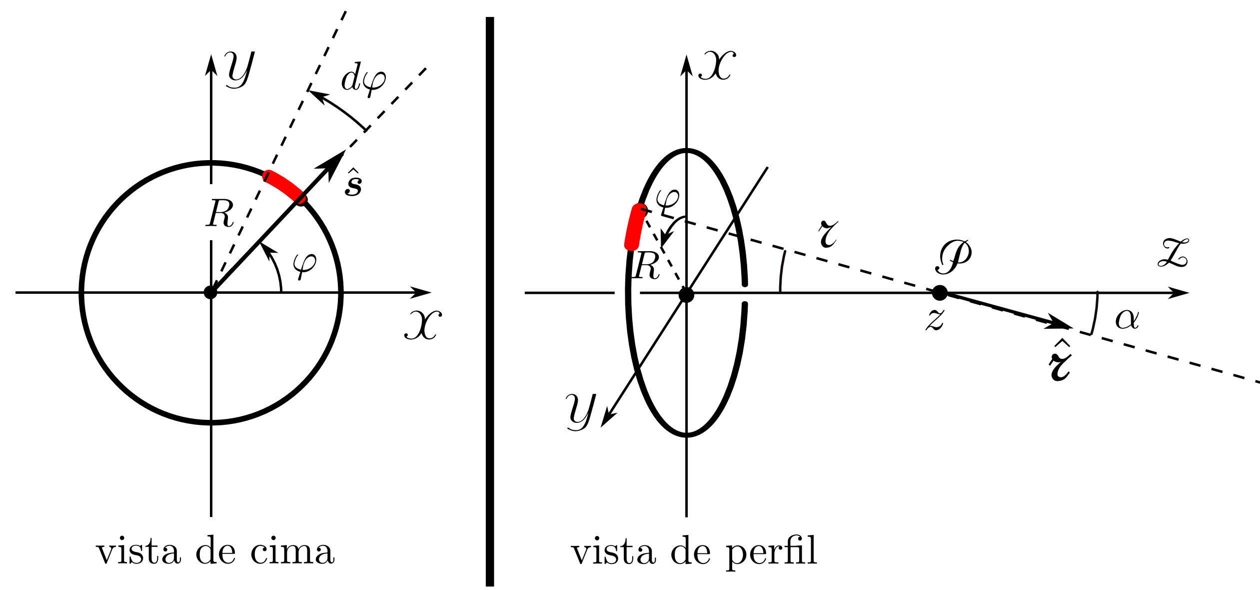
(b) Usaremos a lei de Coulomb e o princípio de superposição (para o campo elétrico). Novamente, escolhemos um elemento infinitesimal de fonte típico no anel, com carga infinitesimal $dq$ e ângulo polar $\varphi$. Este contribui, no ponto $\mathscr{P}(x=0, y=0, z)$, com um campo elétrico infinitesimal dado por

$$d\vec{\boldsymbol{E}} = k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,,$$

onde, claro,

$$\mathscr{r}^2 = R^2 = z^2\,.$$






Calcularemos, a partir disso, as três componentes cartesianas.

- $\underline{E_z}$:
  Para tanto,

$$\begin{aligned} dE_\parallel = dE_z = d\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

onde, claro,

$$\cos\alpha = \frac{z}{\mathscr{r}}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_z &= \oint_{\text{anel}} k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha \\ &= k_0 \frac{\cos\alpha}{\mathscr{r}^2}\oint_{\text{anel}} dq\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Q}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,.}$$

- $\underline{E_y \text{ e } E_x}$:
  Para calcularmos tais componentes, projetaremos, primeiro, $d\vec{\boldsymbol{E}}$ no plano $\mathcal{XY}$, para obter

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp &= \left(d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}\right)\,\hat{\boldsymbol{s}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\boldsymbol{s}}\,. \end{aligned}$$

Naturalmente, tal vetor tem direção variável, devido à dependência de $\hat{\boldsymbol{s}}$ com respeito a $\varphi'$. Portanto, devemos projetá-lo, finalmente, nas direções fixas de $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$.
Comecemos pela componente $y$:

$$\begin{aligned} dE_y &= d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda(\varphi)\,d\ell'}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\!\varphi\, d\varphi\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_y &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\text{anel}} \operatorname{sen}^2\!\varphi\, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \left[\varphi - \frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\pi}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\mathfrak{r}^3}}$$

ou ainda

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,.}$$

Vamos agora para a componente $E_x$. Por simetria, ela deve se anular identicamente:

$$\boxed{E_x = 0\,.}$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_x &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\ , d\varphi \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

■



2. **Resolução:**
(a) Como o módulo do fluxo magnético através do circuito aumenta com o tempo, deve surgir uma corrente induzida, pela lei de Lenz, que gere, dentro do próprio circuito, um campo magnético(“induzido”) que se oponha ao campo magnético externo original. Como esse último aponta para fora da página, no sentido $\hat{\boldsymbol{z}}$, o campo magnético “induzido” deve ter sentido $-\hat{\boldsymbol{z}}$, ou seja, a corrente induzida, pela lei de Biot-Savart, deve ter orientação **horário**.

■

(b) Em um dado instante $t > 0$ s, o vértice $\mathcal{B}$ do condutor móvel está na posição $(x(t) = \sqrt{2}vt/2, y(t) = \sqrt{2}vt/2)$, de modo que o circuito $\mathcal{OABC}$ constitui um quadrado que encontra-se totalmente imerso no campo magnético externo constante $\vec{\boldsymbol{B}}$. Assim, o correspondente fluxo magnético será, tomando o versor normal como $\hat{\boldsymbol{z}}$, simplesmente,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} &:= \oint_{\mathcal{OABC}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= BA(t) \\ &= B\left(\sqrt{2}vt/2\right)^2\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} = \frac{1}{2}Bv^2t^2\,.}$$

■

(c) Tendo em vista que os dois condutores ($\mathcal{COA}$ e $\mathcal{ABC}$) que constituem o circuito são ôhmicos, e que a capacitância e a auto-indutância do circuito são desprezíveis, a intensidade da corrente induzida obedecerá

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{|\mathcal{E}_{\text{ind}}|}{R} \\ &= \frac{1}{R}\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,, \end{aligned}$$

onde, naturalmente, $R$ é a resistência do circuito.
Como foi informado que o material dos condutores tem resistência específica (resistência por comprimento) igual a $r$, a resistência total do circuito, em um instante $t > 0$ s, é dada por

$$\begin{aligned} R &= rL \\ &= r\,4x(t) \\ &= 2\sqrt{2}rvt\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, do item (a), temos

$$\left|\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\right| = Bv^2t\,.$$

Logo,

$$I_{\text{ind}} = \frac{Bv}{2\sqrt{2}r}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\sqrt{2}Bv}{4r}}$$

■

**Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física – Física III – 2013/1**
**Segunda Chamada: 31/07/2013**
**Versão:** $\boxed{\text{E}}$

---

## Formulário

$$\vec{F}_{\rm e} = q\vec{E}\,, \qquad \vec{E} = k_0\frac{q}{\imath^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \ \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\rm int}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \qquad I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{A}\,, \qquad \vec{J} = nq\vec{v}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{F}_{\rm m} = q\vec{v}\times\vec{B}\,, \qquad d\vec{F}_{\rm m} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}\,, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0\,, \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{B}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,,$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1\,, \qquad \text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,.$$

---

### Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Considere as seguintes afirmações: (I) em coordenadas cartesianas usuais, o campo vetorial $\vec{B} = Cx^2\hat{\boldsymbol{x}}$ não pode, jamais, representar um campo magnético; (II) a lei de Biot-Savart vale para qualquer distribuição de corrente, e (III) um campo elétrico induzido, relacionado com uma variação temporal de um campo magnético, pode ser sempre igualado ao gradiente de um potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

2. Três finas cascas esféricas condutoras e concêntricas têm raios $a, b$ e $c$, tais que $0 < a < b < c$. A casca interna está descarregada, a casca intermediária tem uma carga $Q$ e a casca externa tem uma carga $-Q$. Considerando que o potencial é zero no infinito, assinale a opção que indica o valor do potencial em cada uma das três cascas.

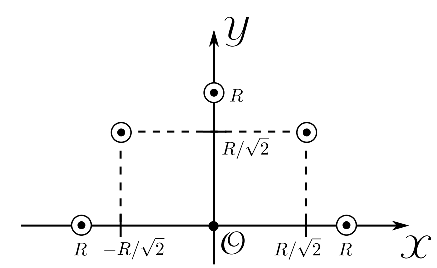
   (a) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(a) = V(b)$.
   (b) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
   (c) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.
   (d) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(a) = V(b)$.
   (e) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.
   (f) $V(c) = k_0Q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.



3. Qual é o módulo do campo elétrico dentro de uma chapa espessa, entre os planos cartesianos usuais $z = -L$ e $z = L$ (portanto, de largura $2L$), com densidade (volumar) de carga constante (estacionária e uniforme) $\rho$?

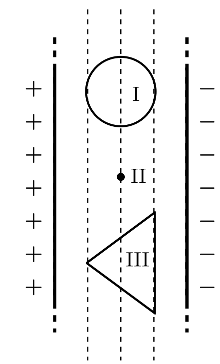
   (a) $|\rho z|/(2\varepsilon_0)$.
   (b) $2|\rho z|/\varepsilon_0$.
   (c) $|\rho z|/\varepsilon_0$.
   (d) $|\rho z|/(2\pi\varepsilon_0)$.
   (e) $|\rho z|/(4\pi\varepsilon_0)$.
   (f) $|\rho z|/(\pi\varepsilon_0)$.

4. Cinco fios retilíneos, longos e condutores são paralelos ao eixo $\mathcal{Z}$ e cada um conduz uma corrente estacionária de intensidade $I$, com orientação no sentido positivo de $\mathcal{Z}$. Cada um dos fios está a uma distância $R$ do eixo $\mathcal{Z}$. Dois dos fios interceptam o eixo $\mathcal{X}$, um em $x = R$ e o outro em $x = -R$. Outro fio intercepta o eixo $\mathcal{Y}$ em $y = R$. Um dos fios restantes intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ e o último intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Qual é o campo magnético num ponto genérico, de cota $z$, do eixo $\mathcal{Z}$?




   (a) $\frac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$.
   (b) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$.
   (c) $-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$.
   (d) $-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$.
   (e) $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$.

5. Três corpos de teste, de mesma carga total $Q$, estão situados na região interna de um capacitor ideal de placas planas e paralelas (muito extensas): (I) uma chapa circular, com densidade arbitrária; (II) uma partícula (pontual), e (III) uma chapa triangular, com densidade arbitrária. Assinale a alternativa que melhor indica a ordem entre os módulos das forças elétricas sobre esses três corpos.




   (a) Nada pode ser afirmado, sem informar, explicitamente, as densidades e distâncias.
   (b) $F_{\rm I} > F_{\rm II} > F_{\rm III}$.
   (c) $F_{\rm I} < F_{\rm II} < F_{\rm III}$.
   (d) $F_{\rm I} > F_{\rm III} > F_{\rm II}$.
   (e) $F_{\rm I} < F_{\rm III} < F_{\rm II}$.
   (f) $F_{\rm II} > F_{\rm I} > F_{\rm III}$.
   (g) $F_{\rm II} < F_{\rm I} < F_{\rm III}$.
   (h) $F_{\rm I} = F_{\rm II} = F_{\rm III}$.

6. Considere as seguintes afirmações: (I) pode haver uma fem induzida não nula em um instante quando o fluxo magnético através de um circuito é igual a zero; (II) a auto-indutância de um solenóide é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) a densidade de energia magnética em algum ponto do espaço é proporcional ao quadrado da magnitude do campo magnético naquele ponto. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

7. Considere as seguintes afirmações: (I) a carga elétrica é uma grandeza contínua (podendo assumir qualquer valor real) e conservada; (II) a lei de Gauss, diferentemente da lei de Coulomb, só vale em situações com distribuição de carga simétrica, e (III) vale um princípio de superposição linear para a força elétrica, o campo elétrico, e o potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.

   (b) Somente a I.

   (c) Somente a II.

   (d) Somente a III.

   (e) Somente a I e a II.

   (f) Somente a I e a III.

   (g) Somente a II e a III.

   (h) Todas.

8. Em um determinado local da Terra, um avião voa no sentido sul → norte, sujeito a um campo magnético no sentido alto → baixo. Qual de suas asas fica com elétrons em excesso e, como conseqüência, em qual delas o potencial elétrico é maior?

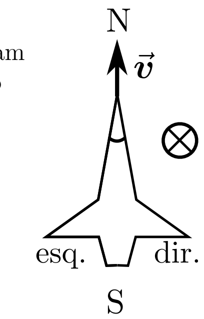
   (a) Ambas as asas continuam neutras e com o mesmo potencial.

   (b) Esquerda e esquerda.

   (c) Esquerda e direita.

   (d) Direita e direita.

   (e) Direita e esquerda.




**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

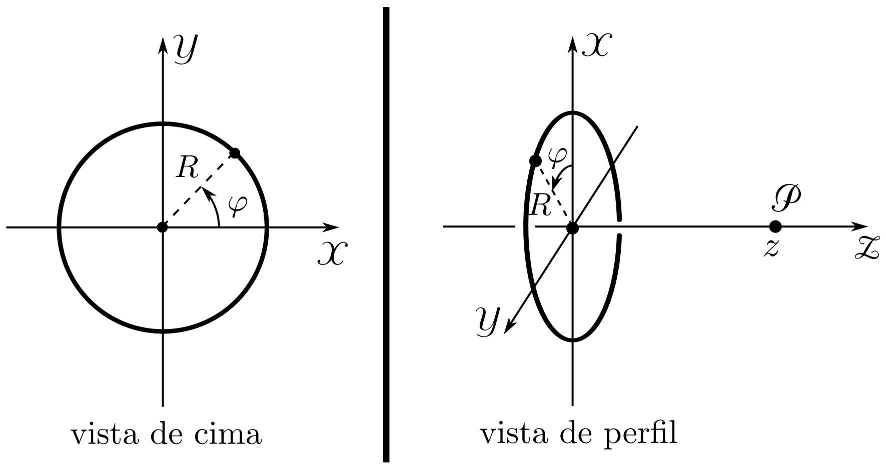
1. [2,6 pontos] Considere um anel circular, de raio $R$, na origem do plano $\mathcal{XY}$, com uma densidade linear de carga elétrica dada por

$$\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi\,, & 0 \le \varphi \le \pi\,, \\ 0\,, & \pi \le \varphi < 2\pi\,, \end{cases}$$

onde $\lambda_0 =$ const e $\varphi'$ é o tradicional ângulo polar (no sentido trigonométrico), medido, no plano $\mathcal{XY}$, a partir do eixo $\mathcal{X}$.

(a) Calcule a carga total $Q$ de tal anel. [0,6 ponto]

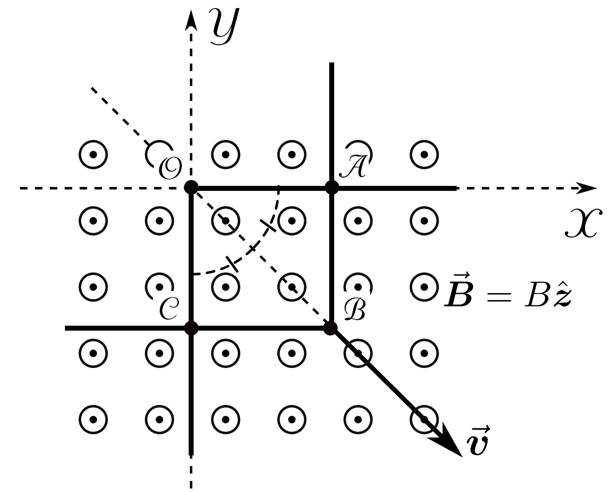
(b) Determine as três componentes cartesianas usuais $(E_x, E_y, E_z)$ do campo elétrico, devido a tal anel, em um ponto típico $\mathcal{P}$ do seu eixo perpendicular de simetria, com coordenadas $(x = 0, y = 0, z)$. [2,0 pontos]




2. [2,6 pontos] Um condutor ôhmico em forma de L translada-se, rigidamente, com velocidade $\vec{v}$, próximo a um outro condutor ôhmico, fixo, também em forma de L, na presença de um campo magnético $\vec{B}$ constante (estacionário



e uniforme). No instante $t = 0$ s, os dois vértices, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{B}$, coincidem, de forma que a área encerrada é nula. Os condutores têm uma resistência específica (ou seja, *resistência por comprimento*) igual a $r$.




(a) Qual é a orientação (sentido) da corrente induzida no circuito $\mathcal{OABC}$? *Justifique.* [0,6 ponto]

Desprezando a capacitância e a auto-indutância do circuito, determine, em um instante genérico $t > 0$ s,

(b) o fluxo do campo magnético através do circuito. [1,0 ponto]

(c) a corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

# Gabarito para Versão $\boxed{\text{E}}$

**Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)**

1. (b)
2. (a)
3. (c)
4. (e)
5. (h)
6. (f)
7. (d)
8. (e)

**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. **Resolução:**
(a) Por definição de densidade linear de carga elétrica, temos que um elemento infinitesimal do anel, com comprimento infinitesimal $d\ell'$, terá carga infinitesimal dada por

$$dq = \lambda\, d\ell\,.$$

Logo, a carga total do anel será

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\text{anel}} dq \\ &= \int_{\text{anel}} \lambda\, d\ell \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lambda(\varphi) R\, d\varphi' \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi R\, d\varphi \\ &= \lambda_0 R \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = 2\lambda_0 R\,.}$$

Naturalmente, como esperado, se $\lambda_0 > 0$, então a carga total $Q$ do anel, que só está carregado nos dois primeiros quadrantes, é positiva.

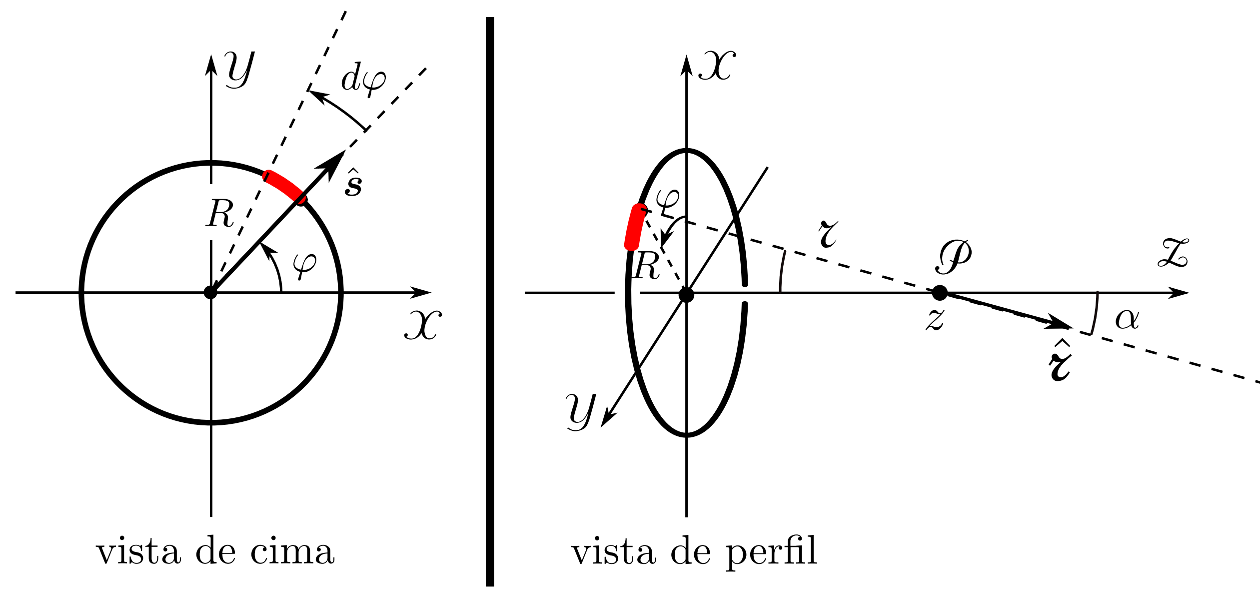
■

(b) Usaremos a lei de Coulomb e o princípio de superposição (para o campo elétrico). Novamente, escolhemos um elemento infinitesimal de fonte típico no anel, com carga infinitesimal $dq$ e ângulo polar $\varphi$. Este contribui, no ponto $\mathscr{P}(x = 0, y = 0, z)$, com um campo elétrico infinitesimal dado por

$$d\vec{\boldsymbol{E}} = k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,,$$

onde, claro,

$$\mathscr{r}^2 = R^2 = z^2\,.$$




Calcularemos, a partir disso, as três componentes cartesianas.

- $\underline{E_z}$:
Para tanto,

$$\begin{aligned} dE_\parallel = dE_z = d\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} &= k_0\frac{dq}{\mathscr{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= k_0\frac{dq}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

onde, claro,

$$\cos\alpha = \frac{z}{\mathscr{r}}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_z &= \oint_{\text{anel}} k_0\frac{dq}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha \\ &= k_0\frac{\cos\alpha}{\mathscr{r}^2}\oint_{\text{anel}} dq\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_z = k_0\frac{Q}{\mathscr{r}^2}\cos\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_z = k_0\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,.}$$

- $E_y$ e $E_x$:

Para calcularmos tais componentes, projetaremos, primeiro, $d\vec{\boldsymbol{E}}$ no plano $\mathcal{XY}$, para obter

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp &= \left(d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}\right)\hat{\boldsymbol{s}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha\, \hat{\boldsymbol{s}}\,. \end{aligned}$$

Naturalmente, tal vetor tem direção variável, devido à dependência de $\hat{\boldsymbol{s}}$ com respeito a $\varphi'$. Portanto, devemos projetá-lo, finalmente, nas direções fixas de $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$.

Comecemos pela componente $y$:

$$\begin{aligned} dE_y &= d\vec{\boldsymbol{E}}_\perp \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda(\varphi)\, d\ell'}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_y &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\text{anel}} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \left[\varphi - \frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\pi}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\mathfrak{r}^3}}$$

ou ainda

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,.}$$

Vamos agora para a componente $E_x$. Por simetria, ela deve se anular identicamente:

$$\boxed{E_x = 0\,.}$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_x &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\ , d\varphi \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

■



2. **Resolução:**

(a) Como o módulo do fluxo magnético através do circuito aumenta com o tempo, deve surgir uma corrente induzida, pela lei de Lenz, que gere, dentro do próprio circuito, um campo magnético("induzido") que se oponha ao campo magnético externo original. Como esse último aponta para fora da página, no sentido $\hat{\boldsymbol{z}}$, o campo magnético "induzido" deve ter sentido $-\hat{\boldsymbol{z}}$, ou seja, a corrente induzida, pela lei de Biot-Savart, deve ter orientação **horário**.

■

(b) Em um dado instante $t > 0$ s, o vértice $\mathcal{B}$ do condutor móvel está na posição $(x(t) = \sqrt{2}vt/2, y(t) = \sqrt{2}vt/2)$, de modo que o circuito $\mathcal{OABC}$ constitui um quadrado que encontra-se totalmente imerso no campo magnético externo constante $\vec{\boldsymbol{B}}$. Assim, o correspondente fluxo magnético será, tomando o versor normal como $\hat{\boldsymbol{z}}$, simplesmente,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} &:= \oint_{\mathcal{OABC}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= BA(t) \\ &= B\left(\sqrt{2}vt/2\right)^2\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} = \frac{1}{2}Bv^2t^2\,.}$$

■

(c) Tendo em vista que os dois condutores ($\mathcal{COA}$ e $\mathcal{ABC}$) que constituem o circuito são ôhmicos, e que a capacitância e a auto-indutância do circuito são desprezíveis, a intensidade da corrente induzida obedecerá

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{|\mathcal{E}_{\text{ind}}|}{R} \\ &= \frac{1}{R}\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,, \end{aligned}$$

onde, naturalmente, $R$ é a resistência do circuito.

Como foi informado que o material dos condutores tem resistência específica (resistência por comprimento) igual a $r$, a resistência total do circuito, em um instante $t > 0$ s, é dada por

$$\begin{aligned} R &= rL \\ &= r\,4x(t) \\ &= 2\sqrt{2}rvt\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, do item (a), temos

$$\left|\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\right| = Bv^2t\,.$$

Logo,

$$I_{\text{ind}} = \frac{Bv}{2\sqrt{2}r}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\sqrt{2}Bv}{4r}}$$

■

## Formulário

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm e} = q\vec{\boldsymbol{E}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = k_0\frac{q}{\imath^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} \left(\text{onde } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\rm int}}{\epsilon_0}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V\,, \qquad V = k_0\frac{q}{r}\,,$$

$$U = k_0\frac{qq'}{r}\,, \qquad C = Q/V\,, \qquad u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,, \qquad I = \int_S \vec{\boldsymbol{J}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}\,, \qquad V = RI\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{F}}_{\rm m} = Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\,, \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0\,, \qquad d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,,$$

$$\oint_C \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I_{\rm enc} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{E}}}}{dt}\,, \qquad \mathcal{E}_{\rm ind} = -\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\,, \qquad \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}[1] = LI_1 + MI_2\,, \qquad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\,,$$

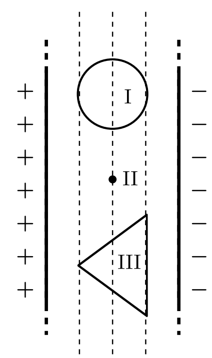
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1\,, \qquad \text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,.$$

## Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)

1. Qual é o módulo do campo elétrico dentro de uma chapa espessa, entre os planos cartesianos usuais $z = -L$ e $z = L$ (portanto, de largura $2L$), com densidade (volumar) de carga constante (estacionária e uniforme) $\rho$?

   (a) $|\rho z|/(2\varepsilon_0)$ .
   (b) $2|\rho z|/\varepsilon_0$ .
   (c) $|\rho z|/\varepsilon_0$ .
   (d) $|\rho z|/(2\pi\varepsilon_0)$ .
   (e) $|\rho z|/(4\pi\varepsilon_0)$ .
   (f) $|\rho z|/(\pi\varepsilon_0)$ .

2. Três corpos de teste, de mesma carga total $Q$, estão situados na região interna de um capacitor ideal de placas planas e paralelas (muito extensas): (I) uma chapa circular, com densidade arbitrária; (II) uma partícula (pontual), e (III) uma chapa triangular, com densidade arbitrária. Assinale a alternativa que melhor indica a ordem entre os módulos das forças elétricas sobre esses três corpos.



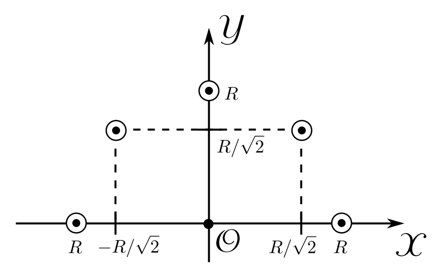

   (a) Nada pode ser afirmado, sem informar, explicitamente, as densidades e distâncias.
   (b) $F_{\rm I} > F_{\rm II} > F_{\rm III}$ .
   (c) $F_{\rm I} < F_{\rm II} < F_{\rm III}$ .
   (d) $F_{\rm I} > F_{\rm III} > F_{\rm II}$ .
   (e) $F_{\rm I} < F_{\rm III} < F_{\rm II}$ .
   (f) $F_{\rm II} > F_{\rm I} > F_{\rm III}$ .
   (g) $F_{\rm II} < F_{\rm I} < F_{\rm III}$ .
   (h) $F_{\rm I} = F_{\rm II} = F_{\rm III}$ .



3. Considere as seguintes afirmações: (I) pode haver uma fem induzida não nula em um instante quando o fluxo magnético através de um circuito é igual a zero; (II) a auto-indutância de um solenóide é proporcional à taxa de variação da corrente no solenóide, e (III) a densidade de energia magnética em algum ponto do espaço é proporcional ao quadrado da magnitude do campo magnético naquele ponto. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

4. Cinco fios retilíneos, longos e condutores são paralelos ao eixo $\mathcal{Z}$ e cada um conduz uma corrente estacionária de intensidade $I$, com orientação no sentido positivo de $\mathcal{Z}$. Cada um dos fios está a uma distância $R$ do eixo $\mathcal{Z}$. Dois dos fios interceptam o eixo $\mathcal{X}$, um em $x = R$ e o outro em $x = -R$. Outro fio intercepta o eixo $\mathcal{Y}$ em $y = R$. Um dos fios restantes intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ e o último intercepta o plano $z = 0$ no ponto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. Qual é o campo magnético num ponto genérico, de cota $z$, do eixo $\mathcal{Z}$?

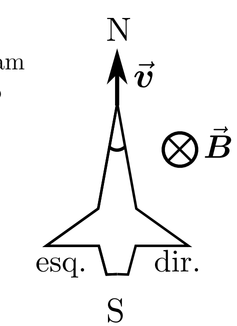



   (a) $\dfrac{\mu_0 I z}{2\pi R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$ .
   (b) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$ .
   (c) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$ .
   (d) $-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ .
   (e) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\sqrt{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$ .

5. Considere as seguintes afirmações: (I) em coordenadas cartesianas usuais, o campo vetorial $\vec{\boldsymbol{B}} = Cx^2\hat{\boldsymbol{x}}$ não pode, jamais, representar um campo magnético; (II) a lei de Biot-Savart vale para qualquer distribuição de corrente, e (III) um campo elétrico induzido, relacionado com uma variação temporal de um campo magnético, pode ser sempre igualado ao gradiente de um potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

6. Em um determinado local da Terra, um avião voa no sentido sul → norte, sujeito a um campo magnético no sentido alto → baixo. Qual de suas asas fica com elétrons em excesso e, como conseqüência, em qual delas o potencial elétrico é maior?




   (a) Ambas as asas continuam neutras e com o mesmo potencial.
   (b) Esquerda e esquerda.
   (c) Esquerda e direita.
   (d) Direita e direita.
   (e) Direita e esquerda.

7. Três finas cascas esféricas condutoras e concêntricas têm raios $a, b$ e $c$, tais que $0 < a < b < c$. A casca interna está descarregada, a casca intermediária tem uma carga $Q$ e a casca externa tem uma carga $-Q$. Considerando que o potencial é zero no infinito, assinale a opção que indica o valor do potencial em cada uma das três cascas.

   (a) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(a) = V(b)$.

   (b) $V(c) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.

   (c) $V(c) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.

   (d) $V(c) = 0$; $V(b) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(a) = V(b)$.

   (e) $V(c) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(b) = 0$; $V(a) = V(b)$.

   (f) $V(c) = k_0 Q\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)$; $V(b) = V(c)$; $V(a) = 0$.

8. Considere as seguintes afirmações: (I) a carga elétrica é uma grandeza contínua (podendo assumir qualquer valor real) e conservada; (II) a lei de Gauss, diferentemente da lei de Coulomb, só vale em situações com distribuição de carga simétrica, e (III) vale um princípio de superposição linear para a força elétrica, o campo elétrico, e o potencial elétrico. Qual(is) delas é(são) verdadeira(s)?

   (a) Nenhuma.
   (b) Somente a I.
   (c) Somente a II.
   (d) Somente a III.
   (e) Somente a I e a II.
   (f) Somente a I e a III.
   (g) Somente a II e a III.
   (h) Todas.

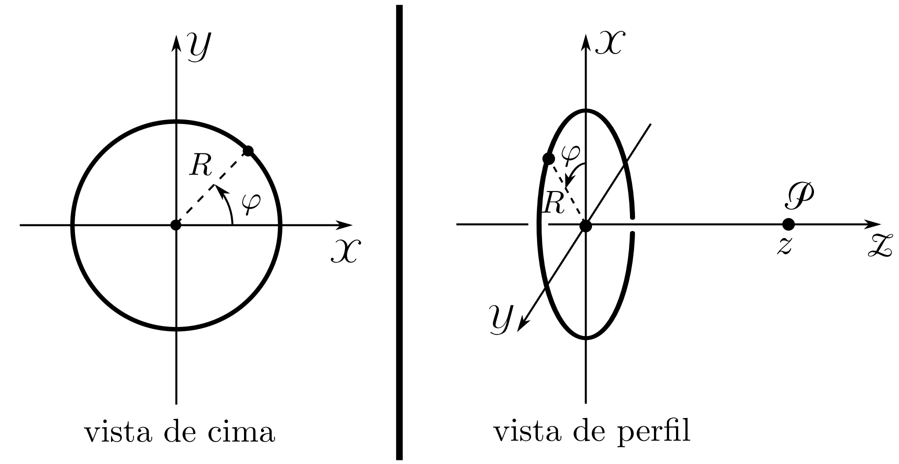
**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. [2,6 pontos] Considere um anel circular, de raio $R$, na origem do plano $\mathcal{XY}$, com uma densidade linear de carga elétrica dada por

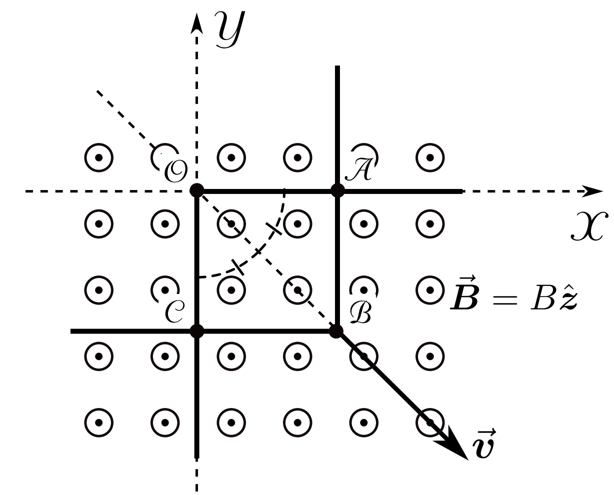
$$\lambda(\varphi) = \begin{cases} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi\,, & 0 \le \varphi \le \pi\,, \\ 0\,, & \pi \le \varphi < 2\pi\,, \end{cases}$$

onde $\lambda_0 =$ const e $\varphi'$ é o tradicional ângulo polar (no sentido trigonométrico), medido, no plano $\mathcal{XY}$, a partir do eixo $\mathcal{X}$.
(a) Calcule a carga total $Q$ de tal anel. [0,6 ponto]
(b) Determine as três componentes cartesianas usuais $(E_x, E_y, E_z)$ do campo elétrico, devido a tal anel, em um ponto típico $\mathcal{P}$ do seu eixo perpendicular de simetria, com coordenadas $(x = 0, y = 0, z)$. [2,0 pontos]






2. [2,6 pontos] Um condutor ôhmico em forma de L translada-se, rigidamente, com velocidade $\vec{v}$, próximo a um outro condutor ôhmico, fixo, também em forma de L, na presença de um campo magnético $\vec{B}$ constante (estacionário e uniforme). No instante $t = 0$ s, os dois vértices, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{B}$, coincidem, de forma que a área encerrada é nula. Os condutores têm uma resistência específica (ou seja, *resistência por comprimento*) igual a $r$.




(a) Qual é a orientação (sentido) da corrente induzida no circuito $\mathcal{OABC}$? *Justifique.* [0,6 ponto]
Desprezando a capacitância e a auto-indutância do circuito, determine, em um instante genérico $t > 0$ s,
(b) o fluxo do campo magnético através do circuito. [1,0 ponto]
(c) a corrente induzida no circuito. [1,0 ponto]

Gabarito para Versão $\boxed{\mathsf{F}}$

**Seção 1. Múltipla escolha (8×0,6 = 4,8 pontos)**

1. (c)
2. (h)
3. (f)
4. (e)
5. (b)
6. (e)
7. (a)
8. (d)

**Seção 2. Questões discursivas (2×2,6 = 5,2 pontos)**

1. **Resolução:**
(a) Por definição de densidade linear de carga elétrica, temos que um elemento infinitesimal do anel, com comprimento infinitesimal $d\ell'$, terá carga infinitesimal dada por

$$dq = \lambda\, d\ell\,.$$

Logo, a carga total do anel será

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{\text{anel}} dq \\ &= \int_{\text{anel}} \lambda\, d\ell \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \lambda(\varphi) R\, d\varphi' \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \lambda_0 \operatorname{sen}\varphi R\, d\varphi \\ &= \lambda_0 R \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{Q = 2\lambda_0 R\,.}$$

Naturalmente, como esperado, se $\lambda_0 > 0$, então a carga total $Q$ do anel, que só está carregado nos dois primeiros quadrantes, é positiva.

■

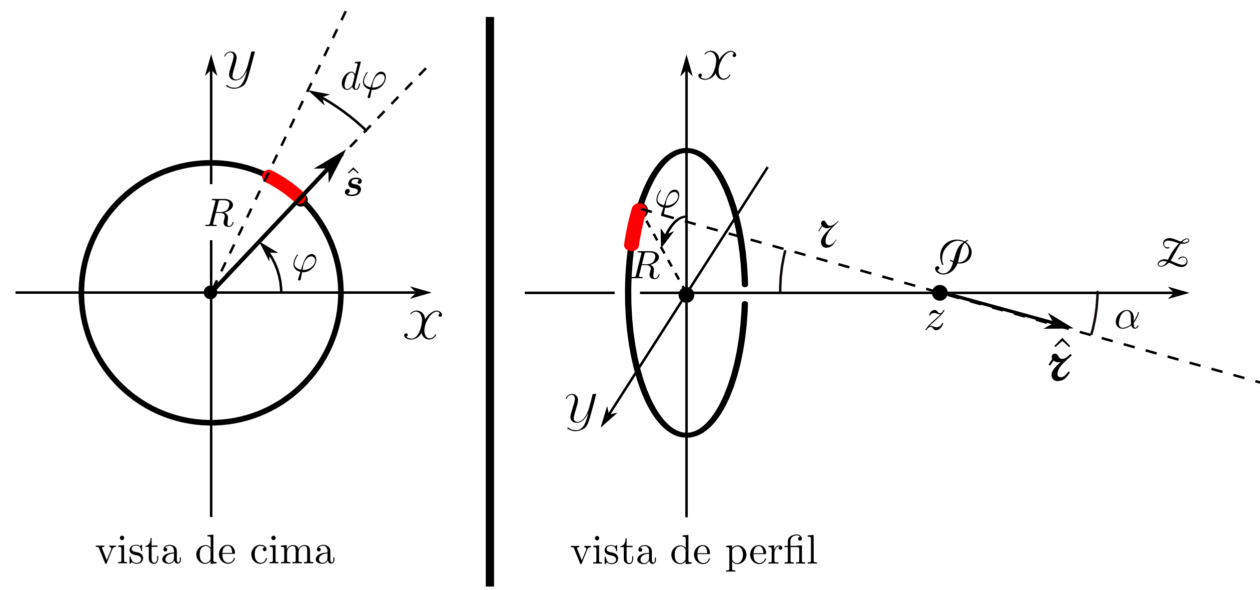
(b) Usaremos a lei de Coulomb e o princípio de superposição (para o campo elétrico). Novamente, escolhemos um elemento infinitesimal de fonte típico no anel, com carga infinitesimal $dq$ e ângulo polar $\varphi$. Este contribui, no ponto $\mathscr{P}(x = 0, y = 0, z)$, com um campo elétrico infinitesimal dado por

$$d\vec{\boldsymbol{E}} = k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\,,$$

onde, claro,

$$\mathscr{r}^2 = R^2 = z^2\,.$$






Calcularemos, a partir disso, as três componentes cartesianas.

- $\underline{E_z}$:
Para tanto,

$$\begin{aligned} dE_\parallel = dE_z = d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2}\, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \\ &= k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha\,, \end{aligned}$$

onde, claro,

$$\cos\alpha = \frac{z}{\mathscr{r}}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_z &= \oint_{\text{anel}} k_0 \frac{dq}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha \\ &= k_0 \frac{\cos\alpha}{\mathscr{r}^2} \oint_{\text{anel}} dq\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Q}{\mathscr{r}^2} \cos\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_z = k_0 \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,.}$$

- $E_y$ e $E_x$:

Para calcularmos tais componentes, projetaremos, primeiro, $d\vec{\boldsymbol{E}}$ no plano $\mathcal{XY}$, para obter

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{E}}_{\perp} &= \left(d\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}\right) \hat{\boldsymbol{s}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \, \hat{\boldsymbol{s}} \, . \end{aligned}$$

Naturalmente, tal vetor tem direção variável, devido à dependência de $\hat{\boldsymbol{s}}$ com respeito a $\varphi'$. Portanto, devemos projetá-lo, finalmente, nas direções fixas de $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$.

Comecemos pela componente $y$:

$$\begin{aligned} dE_y &= d\vec{\boldsymbol{E}}_{\perp} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} \\ &= -k_0 \frac{dq}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda(\varphi)\, d\ell'}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \, . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_y &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\text{anel}} \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \, d\varphi \\ &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \left[\varphi - \frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{2}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\pi} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R}{2\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha}$$

ou

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\mathfrak{r}^3}}$$

ou ainda

$$\boxed{E_y = -\frac{\pi k_0 \lambda_0 R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \, .}$$

Vamos agora para a componente $E_x$. Por simetria, ela deve se anular identicamente:

$$\boxed{E_x = 0 \, .}$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_x &= -k_0 \frac{\lambda_0 R}{\mathfrak{r}^2} \operatorname{sen}\alpha \oint_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \ , d\varphi \\ &= 0 \, . \end{aligned}$$

■



2. **Resolução:**

(a) Como o módulo do fluxo magnético através do circuito aumenta com o tempo, deve surgir uma corrente induzida, pela lei de Lenz, que gere, dentro do próprio circuito, um campo magnético("induzido") que se oponha ao campo magnético externo original. Como esse último aponta para fora da página, no sentido $\hat{\boldsymbol{z}}$, o campo magnético "induzido" deve ter sentido $-\hat{\boldsymbol{z}}$, ou seja, a corrente induzida, pela lei de Biot-Savart, deve ter orientação **horário**.

■

(b) Em um dado instante $t > 0$ s, o vértice $\mathcal{B}$ do condutor móvel está na posição $(x(t) = \sqrt{2}vt/2, y(t) = \sqrt{2}vt/2)$, de modo que o circuito $\mathcal{OABC}$ constitui um quadrado que encontra-se totalmente imerso no campo magnético externo constante $\vec{\boldsymbol{B}}$. Assim, o correspondente fluxo magnético será, tomando o versor normal como $\hat{\boldsymbol{z}}$, simplesmente,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} &:= \oint_{\mathcal{OABC}} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} \\ &= BA(t) \\ &= B\left(\sqrt{2}vt/2\right)^2 , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}} = \frac{1}{2} B v^2 t^2 \, .}$$

■

(c) Tendo em vista que os dois condutores ($\mathcal{COA}$ e $\mathcal{ABC}$) que constituem o circuito são ôhmicos, e que a capacitância e a auto-indutância do circuito são desprezíveis, a intensidade da corrente induzida obedecerá

$$\begin{aligned} I_{\text{ind}} &= \frac{|\mathcal{E}_{\text{ind}}|}{R} \\ &= \frac{1}{R} \frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt} , \end{aligned}$$

onde, naturalmente, $R$ é a resistência do circuito.

Como foi informado que o material dos condutores tem resistência específica (resistência por comprimento) igual a $r$, a resistência total do circuito, em um instante $t > 0$ s, é dada por

$$\begin{aligned} R &= rL \\ &= r\, 4x(t) \\ &= 2\sqrt{2} r v t \, . \end{aligned}$$

Por outro lado, do item (a), temos

$$\left|\frac{d\Phi_{\vec{\boldsymbol{B}}}}{dt}\right| = Bv^2 t \, .$$

Logo,

$$I_{\text{ind}} = \frac{Bv}{2\sqrt{2}r}$$

ou seja,

$$\boxed{I_{\text{ind}} = \frac{\sqrt{2}Bv}{4r}}$$

■