Medindo parâmetros cosmológicos

Introdução à Cosmologia

2012/02

Até agora...

Universo de Friedmann:

- Espacialmente homogêneo e isotrópico;
- Expande com fator de escala a(t):

$$r(t) = a(t)\, r(t_0);$$

- Obedece a Lei de Hubble:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt}\, r(t_0)$$

$$\dot{r}(t) = \dot{a}(t)\, \underbrace{r(t_0)}_{r(t)/a(t)}$$

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\, r(t)$$

$$\boxed{v(t) = H(t)\, r(t)}$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

- Espaço-tempo descrito pela métrica de Robertson-Walker:

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dx^2}{1-\kappa x^2/R_0^2} + x^2 d\Omega^2\right]}$$

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta \mathrm{d}\phi^2$$

$$x \equiv S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0\,\mathrm{sen}(r/R_0) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R_0\,\mathrm{senh}(r/R_0) & (\kappa = -1) \end{cases}$$

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2\right]}$$

Equações básicas

Equação do fluido:

$$\dot{\varepsilon} + 3H(t)(\varepsilon + P) = 0 \xrightarrow{P_i = w_i \varepsilon_i} \boxed{\dot{\varepsilon}_i + 3H(t)\,\varepsilon_i\,(1 + w_i) = 0}$$

$$P = \sum_i P_i \qquad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

Equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) \xrightarrow{P_i = w_i \varepsilon_i} \boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_i \varepsilon_i(1 + 3w_i)}$$

Equações básicas

Equação de Friedmann:

$$\boxed{H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2}}$$

Em termos do parâmetro de densidade:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2}\frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$$

$$\frac{\dot{a}}{H_0} = \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0}\, a^2 + (1-\Omega_0)}$$

Se conhecermos (medirmos) o valor de Ω para cada componente do Universo, podemos determinar a forma de a(t).

Se conhecermos (medirmos) a(t), podemos determinar o valor de Ω para cada componente do Universo.

Como medir o fator de escala?

$$a(t) = \frac{r(t)}{r(t_0)}$$

Teríamos que medir a distância até um objeto no fluxo de Hubble em dois momentos distintos, t e t_0.

Outra opção seria medir o desvio para o vermelho z de um objeto e relacioná-lo com a(t).

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}$$

Poderíamos medir z de vários objetos com evolução conhecida e tentar associar um “tempo” a cada valor de z medido.

Expansão em série de Taylor do fator de escala

Uma função f(x) pode ser escrita em termos de sua série de Taylor em torno de um ponto x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Quanto mais termos, melhor f(x) será representada em todo seu domínio. A série truncada será uma boa aproximação somente em torno de x_0.

Podemos expandir o fator de escala em torno de t_0, e os primeiros termos serão uma boa aproximação somente para valores de $t \sim t_0$:

$$a(t) \approx \underbrace{a(t_0)} + \left.\frac{da}{dt}\right|_{t=t_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 a}{dt^2}\right|_{t=t_0}(t - t_0)^2.$$

$$a(t_0) = a_0 = 1$$

$$a(t) \approx 1 + \underbrace{\frac{da}{dt}}\bigg|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\bigg|_{t=t_0} (t - t_0)^2 .$$

$$\searrow \quad H_0 = H(t_0) = \frac{1}{a_0}\frac{da}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \frac{da}{dt}\bigg|_{t=t_0}$$

Então:

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\bigg|_{t=t_0} (t - t_0)^2 .$$

Definindo o parâmetro de desaceleração hoje:

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}\right)_{t_0} = -\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_{t_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2a}{dt^2}\bigg|_{t_0} = -H_0^2 q_0$$

$$\boxed{a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 \, H_0^2 (t - t_0)^2 .}$$

A expansão em série de Taylor acima não se baseia em nenhum modelo de Universo específico. H_0 e q_0 somente modelam a expansão do Universo em t_0, sem nenhuma hipótese sobre seus componentes e sua dinâmica.

Podemos estimar o valor de q_0 para um modelo de Friedmann através da equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_i \varepsilon_i(1+3w_i) \qquad q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}\right)_{t_0}$$

Dividindo os dois lados por H^2:

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{1}{2}\frac{8\pi G}{3c^2H^2}\sum_i \varepsilon_i(1+3w_i) = -\frac{1}{2}\sum_i \Omega_i(1+3w_i)$$

$$\boxed{q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}\bigg|_{t=t_0} = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_{i,0}(1+3w_i)}$$

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}\bigg|_{t=t_0} = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_{i,0}(1+3w_i)$$

Para o modelo padrão:

Matéria não-relativística $w = 0, \ \Omega_{m,0} = 0.3$

Constante cosmológica $w = -1, \ \Omega_{\Lambda,0} = 0.7$

Radiação $w = 1/3, \ \Omega_{r,0} \approx 0$

$$q_0 \approx \frac{1}{2}(0.3 - 2 \times 0.7 + 0) \approx -0.55$$

Parâmetro de desaceleração negativo, então expansão acelerada!

Determinação experimental de Ho

Podemos usar a lei de Hubble

$$v = H_0 d$$

Como medir velocidades?

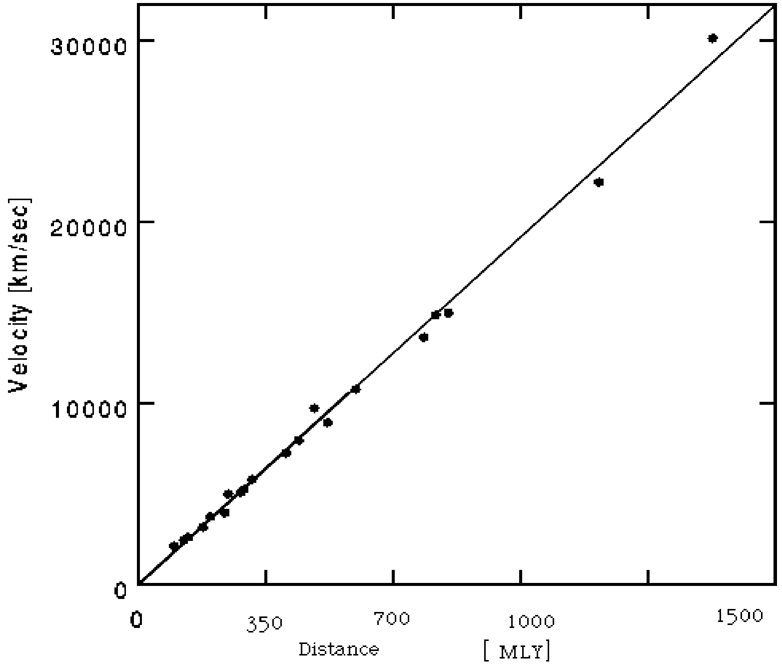
Podemos medir o desvio para o vermelho, e usar a aproximação para fontes próximas:

$$z \approx v/c$$

$$\Downarrow$$

$$cz \approx H_0 d$$

H_o é o coeficiente angular da reta obtida.



Já vimos a definição de distância própria:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \qquad (i)$$

Como não conhecemos a forma funcional do fator de escala, podemos usar a expansão em termos de H_o e q_o:

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 \, H_0^2 (t - t_0)^2 .$$

Temos que obter a série para 1/a(t) e inserir na (i). Vamos admitir que a série tem os seguintes coeficientes (termos de até 2ª ordem):

$$\frac{1}{a(t)} \approx C_1 + C_2(t - t_0) + C_3(t - t_0)^2$$

$$\frac{1}{a(t)} \approx C_1 + C_2(t-t_0) + C_3(t-t_0)^2$$

$$\Rightarrow 1 \approx a(t)\left[C_1 + C_2(t-t_0) + C_3(t-t_0)^2\right]$$

Substituindo a(t) pela expansão obtida

Lembrete: $a(t) \approx 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0\, H_0^2(t-t_0)^2.$

Obtemos:

$$1 \approx \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t-t_0)^2\right]\left[C_1 + C_2(t-t_0) + C_3(t-t_0)^2\right]$$

Realizando a multiplicação e desprezando termos de ordem maior que $(t-t_0)^2$, obtemos:

$$C_1 + (C_2 + C_1H_0)(t-t_0) + (C_3 + C_2H_0 - \frac{C_1}{2}q_0H_0^2)(t-t_0)^2 \approx 1$$

$$\boxed{C_1} + \boxed{(C_2 + C_1 H_0)}(t - t_0) + \boxed{(C_3 + C_2 H_0 - \frac{C_1}{2} q_0 H_0^2)}(t - t_0)^2 \approx 1$$

Comparando termo a termo obtemos que:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 + C_1 H_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = -H_0$$

$$C_3 + C_2 H_0 - \frac{C_1}{2} q_0 H_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = H_0^2 + \frac{q_0}{2} H_0^2$$

E obtemos finalmente a expansão desejada para 1/a(t):

≠ Ryden

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(\frac{2 + q_0}{2} \right) H_0^2 (t - t_0)^2$$

Substituindo $$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0(t - t_0) + \left(\frac{2 + q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_0)^2$$

$\neq$ Ryden

na expressão para a distância própria $$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

obtemos:

$$d_p(t_0) = c\left[\int_{t_e}^{t_0} dt - \int_{t_e}^{t_0} H_0(t - t_0)dt + \underbrace{\int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{2 + q_0}{2}\right) H_0^2(t - t_0)^2 dt}_{O(t_o - t_e)^3}\right]$$

$\neq$ Ryden

$$\boxed{d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2}$$

$$\boxed{d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e)} + \boxed{\frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2}$$

distância própria para Universo estático

Correção pela expansão do Universo

(t_o-t_e): "lookback time", tempo que a luz viajou desde o momento que foi emitida até o momento da detecção

A luz vinda de outras galáxias não carrega informação sobre o valor de (t_o-t_e). O lookback time não é observável.

Mas o desvio para o vermelho é observável!

Gostaríamos então de escrever a série em função de z. Usamos:

$$z = \frac{1}{a(t_e)} - 1 \qquad \text{(ii)}$$

Usamos a expansão para 1/a(t) para aproximar 1/a(t_e) como:

$$\frac{1}{a(t_e)} \approx 1 - H_0(t_e - t_0) + \left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^2(t_e - t_0)^2$$

≠ Ryden

Substituindo em (ii), obtemos:

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + \left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t_e)^2$$

≠ Ryden

Invertendo a série acima, obtemos (exercício):

$$t_0 - t_e \approx \frac{1}{H_0}\left[z - \left(\frac{2+q_0}{2}\right) z^2\right]$$

≠ Ryden

Substituindo na expressão para a distância própria,

$$d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2$$

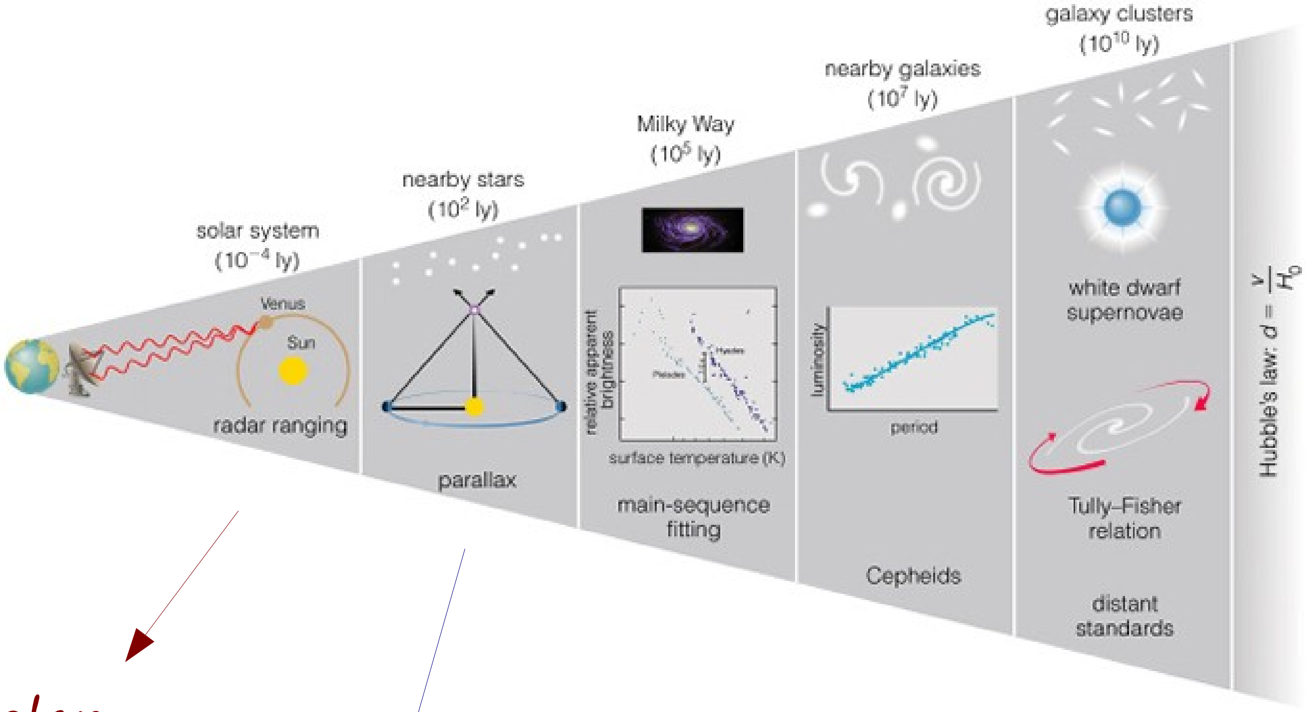
obtemos:

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0}\left[z - \left(\frac{2+q_0}{2}\right) z^2\right] + \frac{cH_0}{2}\frac{z^2}{H_0^2}$$

≠ Ryden

$$\boxed{d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z\right]}$$

A escada cósmica de distâncias (distance ladder)

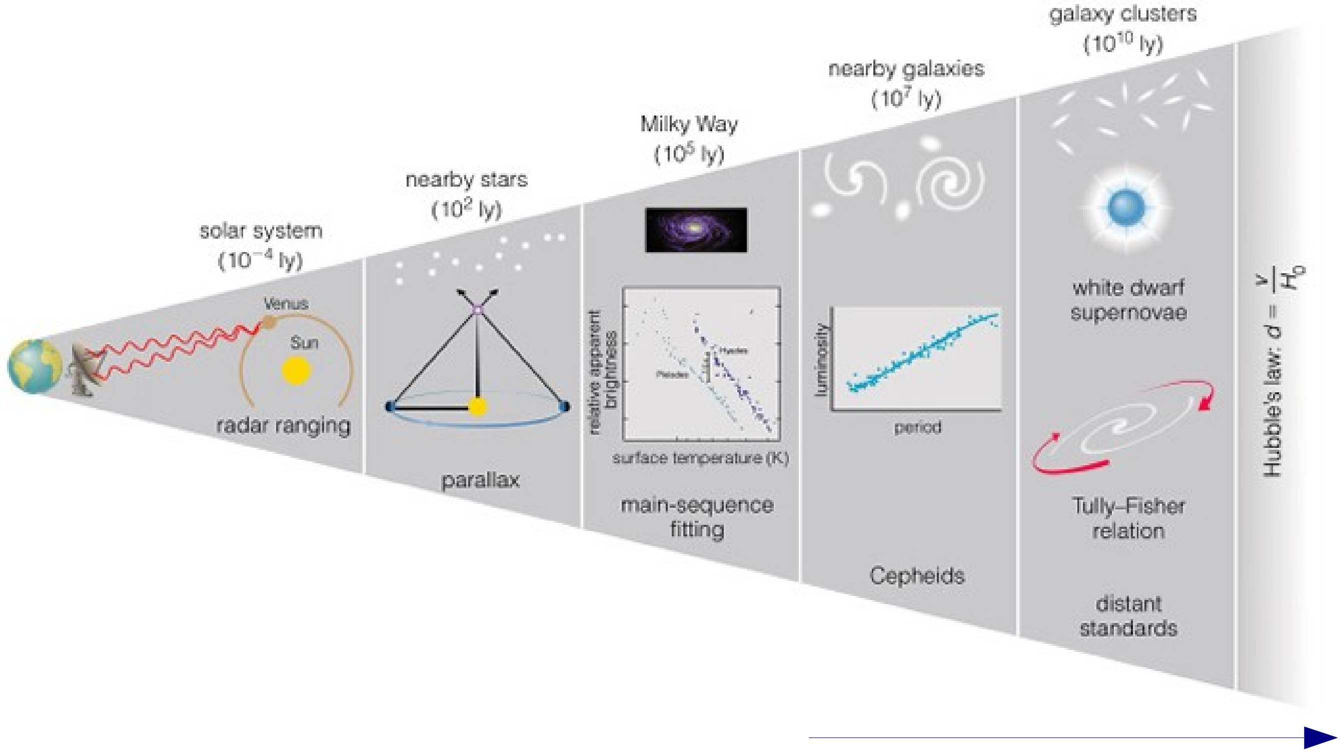


Sistema Solar:
Reflexão de
ondas de rádio.

Estrelas
próximas:
Paralaxe.

Métodos para medir distâncias cada vez maiores são calibrados pelos resultados dos métodos para distâncias menores.

Objetos no fluxo de Hubble



Galáxias e aglomerados

Como definir distância em um Universo em expansão?

Observáveis em escala cosmológica

1. Desvio para o vermelho

   O desvio para o vermelho z pode ser obtido observando linhas de emissão ou absorção e comparando com o espectro de repouso medido em laboratório na Terra.

2. Diâmetro angular

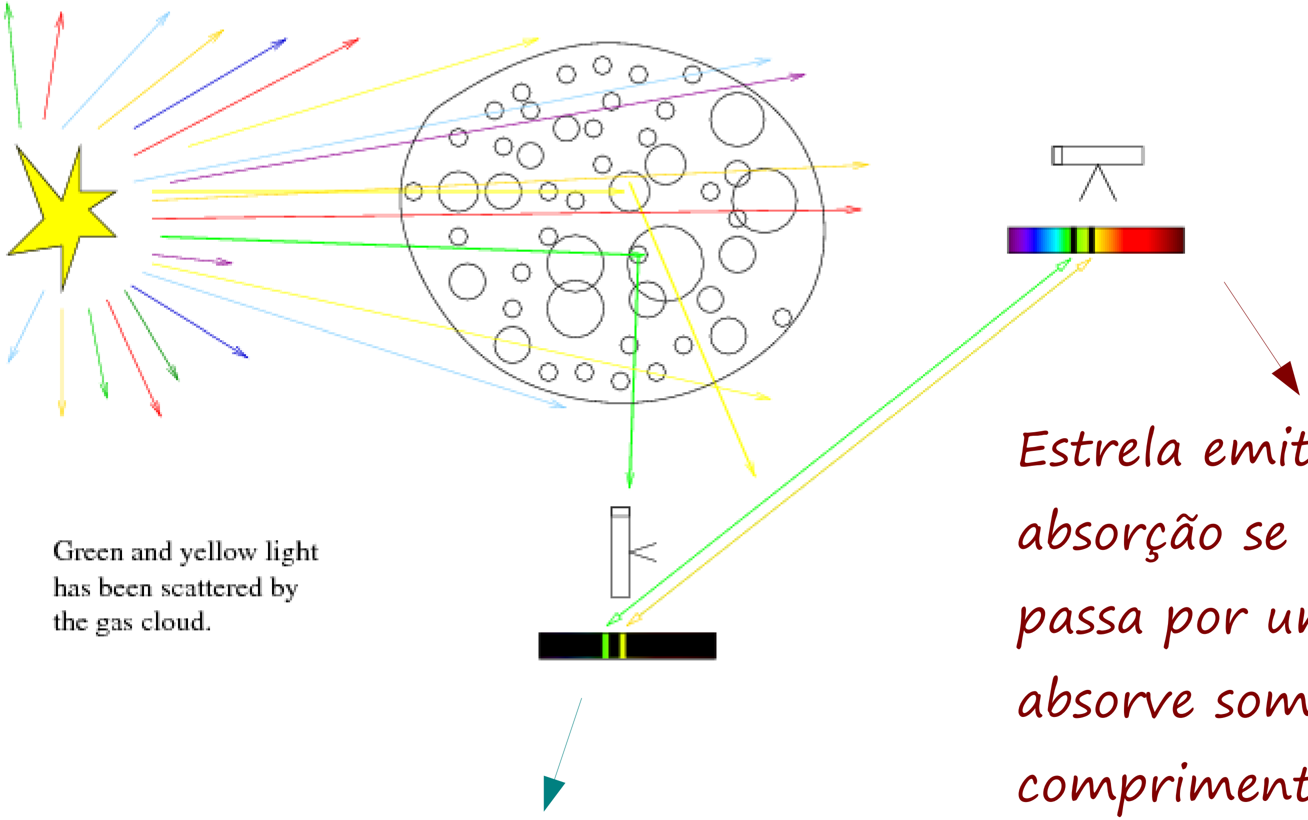
   Podemos medir na Terra o diâmetro angular de objetos extensos, como galáxias.

3. Fluxo de luz

   Podemos medir o fluxo de energia emitido por um objeto em uma dada faixa de comprimento de onda (ou frequência).

Medidas de desvio para o vermelho

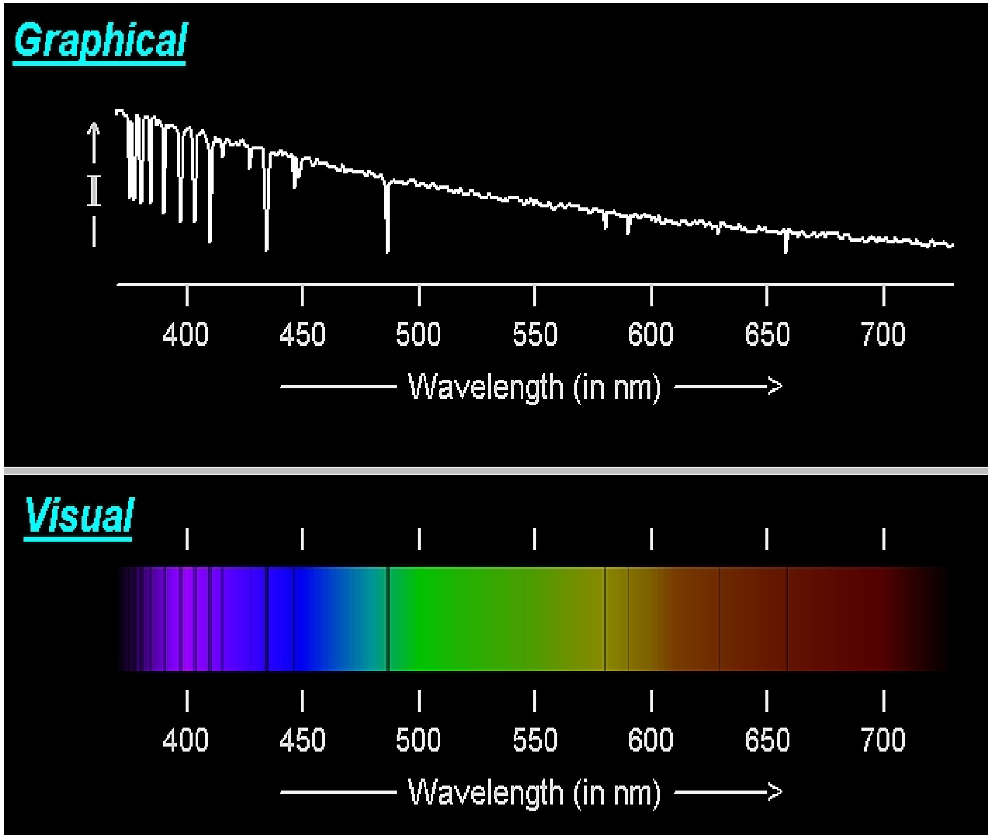
1. Obter espectro



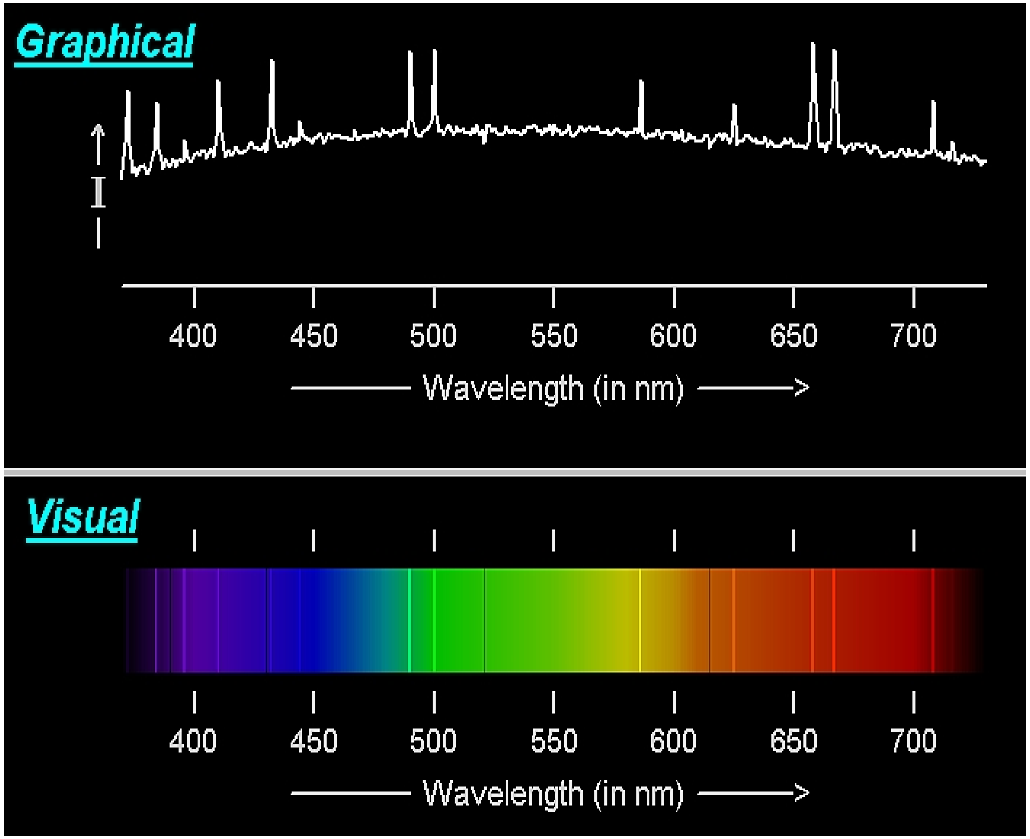
Estrela emite contínuo e linhas de absorção se formam quando luz passa por uma nuvem de gás, que absorve somente alguns comprimentos de onda e transmite os outros.

Nuvem reemite luz absorvida em todas as direções.

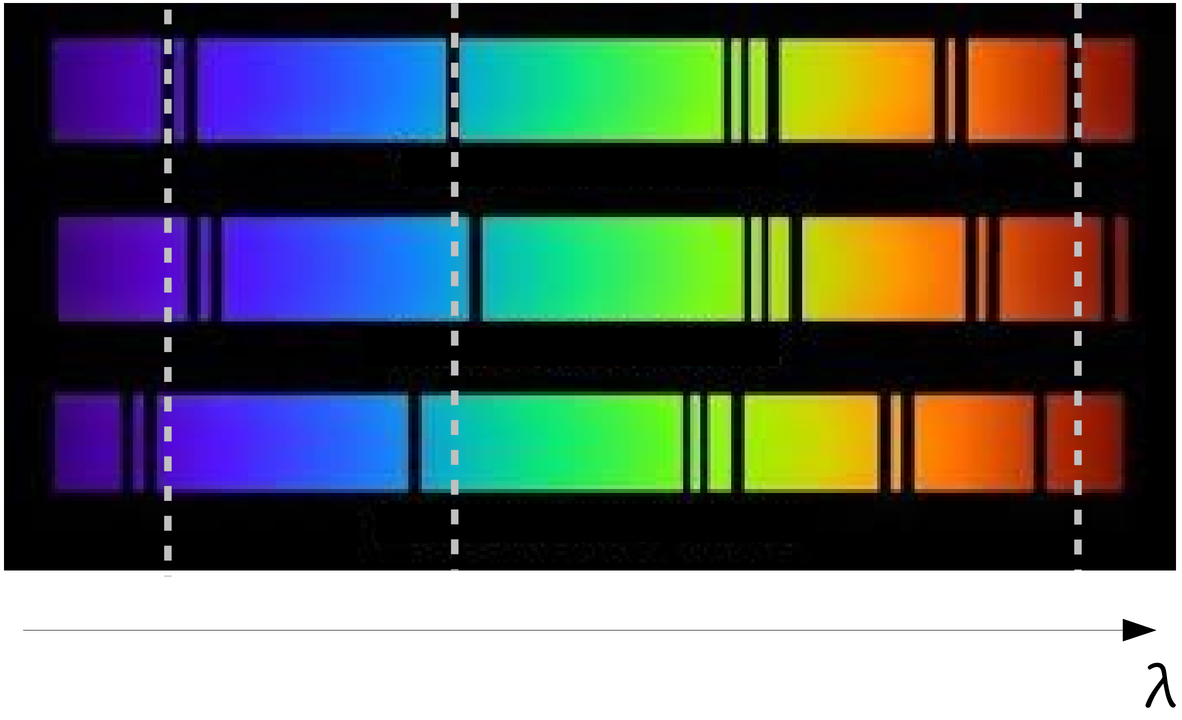
Espectro de uma estrela



Espectro de uma galáxia



2. Procurar por linhas de emissão ou absorção conhecidas e medir desvios



Espectro de referência

$\lambda_{obs} > \lambda_{em}$ $z>0$

$\lambda_{obs} < \lambda_{em}$ $z<0$

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

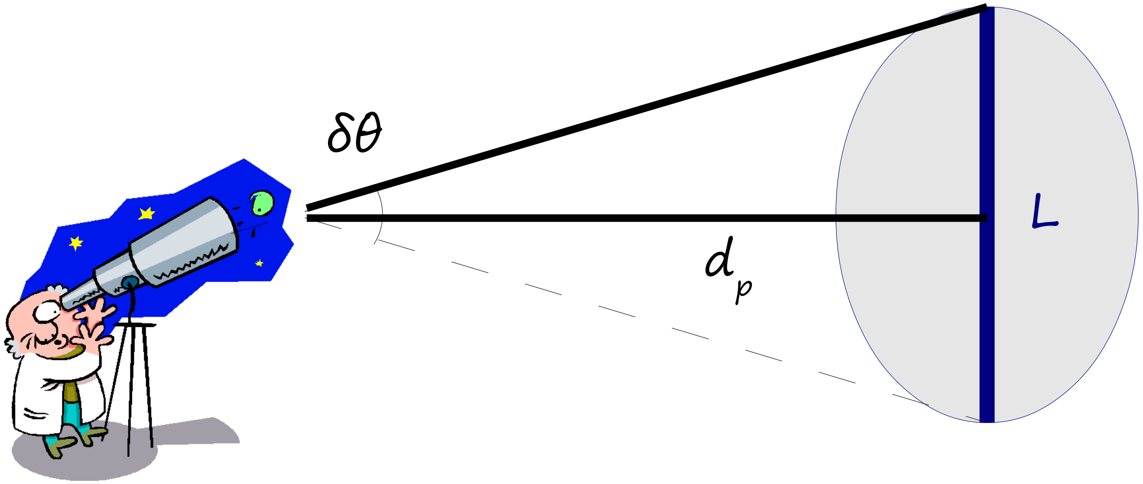
Distância de diâmetro angular D_A

Régua padrão: Objeto astronômico cujo tamanho próprio L é conhecido.

Medindo o diâmetro angular δθ do objeto visto desde a Terra, podemos calcular a chamada **Distância de Diâmetro Angular**, definida como:

$$\boxed{D_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}}$$

Em um Universo estático (sem expansão) e euclidiano (k=0):



Observador
na Terra

Régua padrão de
tamanho próprio L

$$\tan(\delta\theta/2)=L/(2d_p)$$

Para $\delta\theta \ll 1$:

$$\tan(\delta\theta/2)\approx\delta\theta/2$$

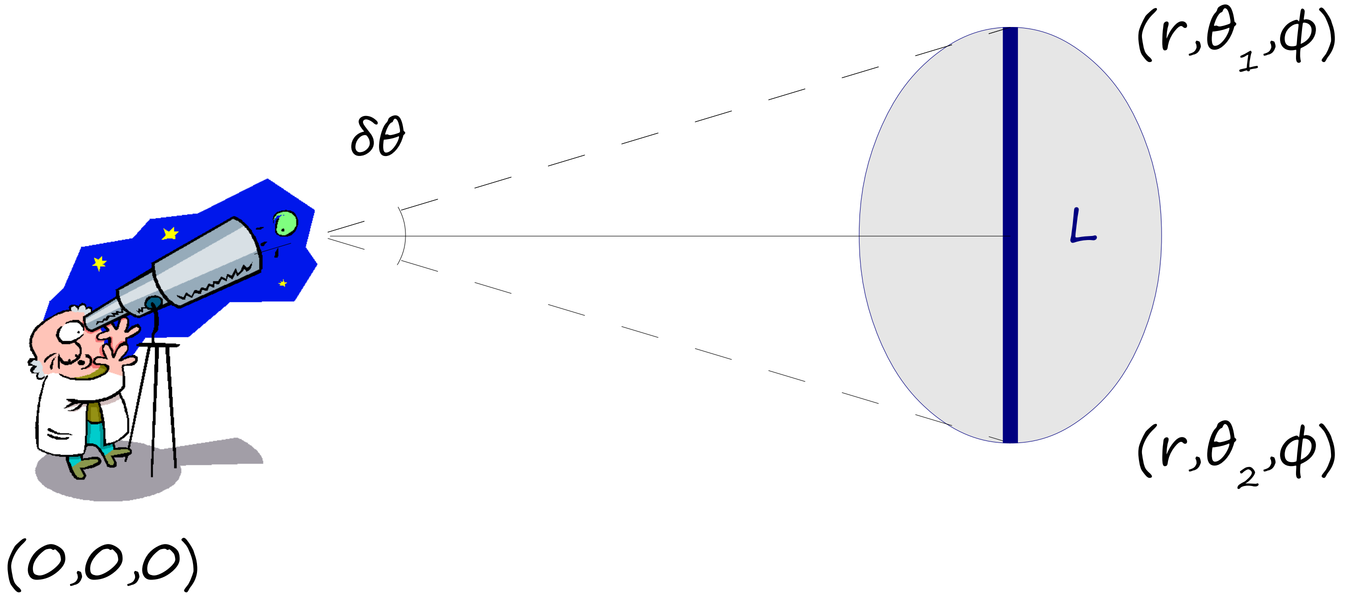
$$\delta\theta/2=L/(2d_p)$$

$$d_p=L/\delta\theta=D_A$$

A distância de diâmetro angular é igual à distância própria.

No caso geral isso NÃO é verdade e D_A é apenas uma definição de distância.

Em um Universo em expansão e com curvatura espacial qualquer:



No momento da emissão:

$$ds^2 = -c^2 \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{dt^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ a(t_e)^2}}{a(t)^2} \left[\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{dr^2} + S_\kappa(r)^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \delta\theta^2}}{d\Omega^2} \right]$$

$$ds = a(t_e) S_\kappa(r) \delta\theta$$

$$\begin{tikzcd} ds \arrow[d] & = & a(t_e) \arrow[d] & S_\kappa(r)\delta\theta \\ L & & 1/(1+z) & \end{tikzcd}$$

$$L = \frac{1}{1+z} S_k(r)\delta\theta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D_A = \frac{S_\kappa(r)}{1+z}}$$

Para um Universo de tri-curvatura nula (como no modelo padrão):

$$D_A = \frac{d_p(t_0)}{1+z} = d_p(t_e)$$

Portanto, em um Universo em expansão, com κ=0, a distância de diâmetro angular é igual à distância própria no momento em que a luz foi emitida.

Usando: $d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z\right]$ ≠ Ryden

$$D_A \approx \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z\right]$$ = Ryden

Para z<<1: $\frac{1}{1+z} \approx 1 - z$

Então,

$$D_A \approx (1-z) \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{1+q_0}{2} z\right]$$ = Ryden

Mantendo somente os termos até $O(z^2)$, chegamos a

$$\boxed{D_A \approx \frac{c}{H_0} z \left[1 - \frac{3+q_0}{2} z\right]}$$

= Ryden

Então, se medirmos os valores de z e D_A para diversos objetos pertencentes a uma determinada categoria de régua padrão, podemos ajustar os dados com a função acima para obter os valores de H_o e q_o.

Oscilações acústicas de bárions (BAO) fornecem escala que funciona como régua padrão: