

# Distâncias em cosmologia

L. Claudionor da Silva e M. O. Calvão  
*Universidade Federal do Rio de Janeiro*  
*Instituto de Física, C. P. 68528*  
*21941-972 Rio de Janeiro, RJ*  
*Brasil*

26 de junho de 2011

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cosmografia de Robertson-Walker</b>	<b>4</b>
2.1	Tri-curvatura nula ( $k = 0$ ) . . . . .	5
2.2	Tri-curvatura positiva ( $k = +1$ ) . . . . .	5
2.3	Tri-curvatura negativa ( $k = -1$ ) . . . . .	6
2.4	Expressão unificada ( $k = 0, \pm 1$ ) . . . . .	8
2.5	O desvio para o vermelho $z$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Cosmodinâmica</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Distância própria <math>D</math></b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Distância comóvel (longitudinal) <math>D_C</math></b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Distância de diâmetro (ou tamanho) angular <math>D_A</math></b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Distância de volume comóvel <math>D_V</math></b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Distância de luminosidade <math>D_L</math></b>	<b>17</b>
8.1	Distância de luminosidade para um universo com métrica de Robertson-Walker . . . . .	17
<b>9</b>	<b>Distância de movimento próprio <math>D_M</math></b>	<b>21</b>

<b>10 Distância de contagem de fótons <math>D_P</math></b>	<b>24</b>
<b>11 Distância de fluxo de fótons <math>D_F</math></b>	<b>26</b>
<b>12 Módulo de Distância <math>\mu</math></b>	<b>28</b>
<b>13 Equações de Friedmann e de fluido</b>	<b>29</b>

## 1 Introdução

Na relatividade, em geral, e na cosmologia, em particular, podemos dar boas motivações para diversas noções de distância, conceitualmente distintas. Todas elas coincidem, numericamente, no caso de um objeto e observador em repouso em um mesmo referencial inercial do espaço-tempo de Minkowski da relatividade especial. No entanto, num modelo relativístico arbitrário (não necessariamente cosmológico), elas diferem, algumas delas mantendo certas relações universais entre si [1, 2].

O objetivo desse trabalho é deixar claras as motivações que levam à definição de algumas das distâncias mais utilizadas no contexto cosmológico, assim como a dedução nítida e explícita, de modo a não deixar espaço, ainda que no referente à notação (devido à sua não-padronização nos vários textos escritos por autores distintos), da forma pela qual elas se relacionam com grandezas diretamente mensuráveis, tais como o fluxo de radiação, o diâmetro angular e o desvio para o vermelho espectral de uma fonte.

Além disso, no ambiente de programação “Matlab”, implementamos uma interface gráfica em que o usuário pode explorar o comportamento das diversas distâncias em função do desvio para o vermelho e de vários outros parâmetros cosmológicos que determinam o número e a natureza (via a correspondente equação de estado) de diferentes componentes do universo.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, deduzimos as expressões para os elementos de linha das tri-geometrias espaciais de Robertson-Walker, assim como a expressão para o desvio para o vermelho cosmológico. Na Seção 3, apresentamos nosso modelo de conteúdo material, particularmente, a correspondente razão piezoenergética, e integramos a equação de fluido para obter o parâmetro de Hubble como função do desvio para o vermelho e parâmetros de densidade e da equação de estado. Na Tabela 1, apresentamos nossa notação, significado e equações correspondentes de referência.

Símbolo	Significado	Equação de referência
$t$	Tempo cósmico	(1)
$a$	Fator de escala	(1)
$\chi$	Coordenada radial “natural”	(21)
$r$	“Raio areal”	(27), (28)
$k$	Parâmetro (Índice) de tri-curvatura	(25), (26)
$K$	Tri-curvatura gaussiana	(25), (26)
$\text{senn}_K$	Função seno generalizado	(22)
$\text{arcsenn}_K$	Função inversa do seno generalizado	(23)
$D$	Distância própria	(48), (49)
$D_C$	Distância comóvel (longitudinal)	(50), (51)
$D_A$	Distância de diâmetro (ou tamanho) angular	(53)
$D_V$	Distância de volume comóvel	
$D_M$	Distância de movimento próprio	
$D_P$	Distância de contagem de fótons	
$D_L$	Distância de luminosidade	
$D_F$	Distância de fluxo de fótons	
$\mu$	Módulo de distância	
$z$	Desvio para o vermelho	
$H$	Parâmetro de Hubble	
$D_H$	Distância de Hubble	(38)
$E$	Parâmetro de Hubble normalizado	
$w$	Razão piezoenergética	
$\epsilon$	Densidade de energia	
$P$	Pressão	
$\Omega$	Parâmetro de densidade (de energia)	
$\Omega_K$	“Parâmetro de densidade” de curvatura	
$w_0, w_a$	Parâmetros da razão piezoenergética (de equação de estado)	
subíndice 0	Valor da grandeza hoje, em $t = t_0$	
subíndice $i$	Valor da grandeza para a $i$ -ésima espécie de um sistema multi-componente	
	Horizonte de partículas	
	Horizonte de eventos	

Tabela 1: Notação.

## 2 Cosmografia de Robertson-Walker

Na cosmologia relativística padrão, o espaço-tempo de base é considerado como uma variedade pseudo-riemanniana (de fato lorentziana) quadri-dimensional, oriunda do produto de uma variedade “temporal” unidimensional e uma variedade “espacial” tri-dimensional riemanniana (com métrica positiva definida):  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ . Por argumentos de caráter observacional e de simplicidade, costuma-se, como faremos, adotar uma variedade “espacial” maximalmente simétrica (homogênea e isotrópica) de Robertson-Walker. As linhas de universo (do tipo temporal) ortogonais a tais hipersuperfícies descrevem observadores para os quais a simetria maximal espacial é explícita, manifesta, e eles serão denominados *observadores de Hubble* ou *comóveis*. Destarte, sem perda de generalidade, podemos trabalhar com um sistema de coordenadas em que o elemento de linha assume a forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dl^2(x^i), \quad (1a)$$

com

$$dl^2(x^i) := \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j. \quad (1b)$$

Uma coordenada temporal  $t$  deste tipo é dita um *tempo cósmico* e está, claro, definida a menos de uma constante global aditiva. Naturalmente, ela coincide com o tempo próprio de cada observador de Hubble; isto, contudo, não é uma caracterização suficiente de tal tempo cósmico, pois ele exige que haja, ademais, uma sincronização dos tempos próprios de cada observador de Hubble, de modo que os termos cruzados  $g_{0i} \equiv 0$ .<sup>1</sup> Já as correspondentes coordenadas espaciais  $x^i$  estão definidas a menos de uma transformação  $x^i \rightarrow x'^i(x^j)$  e podem ser pensadas como coordenadas que rotulam ou identificam diferentes observadores de Hubble; neste sentido, elas desempenham, no contexto cosmológico, um papel essencialmente idêntico ao das coordenadas lagrangianas, materiais ou substanciais da mecânica de fluidos newtoniana corriqueira, em contraste com as chamadas coordenadas espaciais.

A geometria espacial, da tri-variedade  $\mathcal{V}$ , pode ser dividida em três classes, conforme o sinal ( $k = 0, \pm 1$ ) do escalar de tri-curvatura, a qual, obviamente, por homogeneidade, tem de ser constante.

---

<sup>1</sup>Também é comum adotar-se uma outra coordenada temporal, dita *tempo conforme*,  $\eta$ , definida por  $d\eta := dt/a(t)$ , de modo que o elemento de linha fica:

$$ds^2 = a^2(t) [-c^2 dt^2 + dl^2(x^i)].$$

## 2.1 Tri-curvatura nula ( $k = 0$ )

No caso de uma variedade “espacial” com *tri-curvatura nula*, o usual é identificarmos-la com o espaço euclidiano tri-dimensional  $\mathbb{R}^3$ ,<sup>2</sup> para o qual sempre existe um sistema global de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  em que o elemento de linha pode ser expresso como

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2)$$

Passando para coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ ,

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (3a)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (3b)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (3c)$$

onde

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad (3d)$$

tal elemento de linha assume a forma

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (4)$$

## 2.2 Tri-curvatura positiva ( $k = +1$ )

Uma variedade “espacial” com *tri-curvatura positiva*, pode ser construída como a generalização da geometria de uma esfera bi-dimensional imersa num tri-espaço euclidiano usual.<sup>3</sup> Concretamente, consideremos um espaço quadri-dimensional euclidiano, não-físico, abstrato, fictício, no qual podemos sempre definir um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z, w)$  em que o elemento de linha (não físico) fica

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2. \quad (5)$$

Nesse espaço e nesse sistema de coordenadas, uma tri-esfera  $S^3(R_0)$ , de raio  $R_0$ , por definição, tem equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R_0^2 = \text{constante}. \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>A topologia de tal espaço é a usual, simplesmente conexa; existem outras topologias compatíveis com esta mesma métrica local.

<sup>3</sup>Mais uma vez, a correspondente topologia de base é a usual, também simplesmente conexa e, agora, compacta. Outras topologias, localmente compatíveis com a mesma métrica são ainda possíveis, mas, para manter a completeza geodésica, devem todas ser compactas.

Definindo três novos parâmetros  $(\bar{\chi}, \theta, \phi)$ , inspirados obviamente por um sistema de coordenadas esféricas neste espaço não físico, pelas equações

$$w = R_0 \cos \bar{\chi}, \quad (7a)$$

$$z = R_0 \sen \bar{\chi} \cos \theta, \quad (7b)$$

$$y = R_0 \sen \bar{\chi} \sen \theta \sen \phi, \quad (7c)$$

$$x = R_0 \sen \bar{\chi} \sen \theta \cos \phi, \quad (7d)$$

onde

$$0 < \bar{\chi} < \pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad (7e)$$

satisfazemos identicamente a equação (6). Isto significa que  $(\bar{\chi}, \theta, \phi)$  são coordenadas intrínsecas da tri-esfera.

Diferenciando (7a)–(7d) e substituindo em (5) obtém-se o elemento de linha induzido sobre a tri-esfera

$$dl^2 = dL^2|_{S^3(R_0)} = R_0^2 [d\bar{\chi}^2 + \sen^2 \bar{\chi} (d\theta^2 + \sen^2 \theta d\phi^2)]. \quad (8)$$

Podemos, agora, introduzir duas coordenadas do tipo radial associadas com a coordenada angular  $\bar{\chi}$ . Uma delas,  $\chi$ , é diretamente o comprimento linear relacionado ao arco  $\theta = \text{const}$ ,  $\phi = \text{const}$ , ao passo que a outra,  $r$ , é o “raio areal”<sup>4</sup> das 2-esferas  $\bar{\chi} = \text{const}$ :

$$\chi := R_0 \bar{\chi}, \quad 0 < \chi < \pi R_0 \quad (9)$$

$$r := R_0 \sen \bar{\chi} = R_0 \sen (\chi/R_0), \quad 0 < r < R_0. \quad (10)$$

Substituindo (9) e (10) em (8), obtemos as correspondentes expressões para o elemento de linha

$$dl^2 = d\chi^2 + R_0^2 \sen^2(\chi/R_0) (d\theta^2 + \sen^2 \theta d\phi^2) \quad (11)$$

$$= \frac{dr^2}{1 - R_0^2/r^2} + r^2(d\theta^2 + \sen^2 \theta d\phi^2). \quad (12)$$

### 2.3 Tri-curvatura negativa ( $k = -1$ )

Uma variedade “espacial” com *tri-curvatura negativa* pode ser construída como a generalização da geometria de um hiperbolóide bi-dimensional de

---

<sup>4</sup>A expressão “raio areal” (aportuguesamento de “areal radius”) refere-se ao fato de que o quadrado de tal grandeza multiplicado por  $4\pi$  dá justamente a área (física) das 2-esferas  $\bar{\chi} = \text{const}$ .

duas folhas, imerso num tri-espaço de Minkowski.<sup>5</sup> Concretamente, consideremos um espaço quadri-dimensional de Minkowski, não-físico, abstrato, fictício, auxiliar, no qual podemos sempre definir um sistema de coordenadas pseudocartesianas  $(x, y, z, w)$  em que o elemento de linha (não físico) fica

$$dL^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2. \quad (13)$$

Nesse espaço e nesse sistema de coordenadas, um tri-hiperbolóide de duas folhas  $H^3(R_0)$  de “raio”  $R_0$ ,<sup>6</sup> por definição, tem equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -R_0^2 = \text{const.} \quad (14)$$

Passando novamente para um outro sistema de coordenadas  $(\bar{\chi}, \theta, \phi)$ , definidas por

$$w = R_0 \cosh \bar{\chi} \quad (15a)$$

$$z = R_0 \sinh \bar{\chi} \cos \theta \quad (15b)$$

$$y = R_0 \sinh \bar{\chi} \sin \theta \sin \phi \quad (15c)$$

$$x = R_0 \sinh \bar{\chi} \sin \theta \cos \phi, \quad (15d)$$

onde

$$0 < \bar{\chi} < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad (15e)$$

e seguindo um desenvolvimento análogo ao da subseção anterior, chega-se a um elemento de linha da forma

$$dl^2 = dL^2|_{H^3(R_0)} = R_0^2 [d\bar{\chi}^2 + \sinh^2 \bar{\chi} (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2)] \quad (16)$$

$$= d\chi^2 + R_0^2 \sinh^2 (\chi/R_0) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (17)$$

$$= \frac{dr^2}{1 + R_0^2/r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (18)$$

Aqui, definimos

$$\chi := R_0 \bar{\chi}, \quad 0 < \chi < +\infty \quad (19)$$

$$r := R_0 \sinh \bar{\chi}, \quad 0 < r < +\infty. \quad (20)$$

---

<sup>5</sup>Na verdade, usamos somente uma única das folhas, de modo que a correspondente topologia é considerada como a usual, homeomorfa a de  $\mathbb{R}^3$ . Continuam, obviamente, existindo outras topologias, localmente compatíveis com a mesma métrica.

<sup>6</sup>Tal “raio”, na verdade, é a distância, segundo a métrica dada por (13), desde a origem até uma qualquer das folhas do tri-hiperbolóide.

## 2.4 Expressão unificada ( $k = 0, \pm 1$ )

Uma expressão geral para o elemento de linha quadri-dimensional (1), válida para qualquer sinal de tri-curvatura, é

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{senn}_k^2 \left( \sqrt{|K|} \chi \right) (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (21)$$

onde

$$\text{senn}_k(\bar{\chi}) := \begin{cases} \text{sen}(\bar{\chi}) & (k = +1) \\ \bar{\chi} & (k = 0) \\ \text{senh}(\bar{\chi}) & (k = -1). \end{cases} \quad (22)$$

Aproveitamos também para definir a função inversa,  $\text{arcsenn}_k$ , de  $\text{senn}_k$ :

$$\text{arcsenn}_k(\bar{r}) := \begin{cases} \arcsen(\bar{r}) & (k = +1) \\ \bar{r} & (k = 0) \\ \text{arcsenh}(\bar{r}) & (k = -1). \end{cases} \quad (23)$$

É fácil verificar que

$$\text{coss}_k(\bar{\chi}) := \sqrt{1 - k \text{senn}_k^2(\bar{\chi})} = \begin{cases} \cos(\bar{\chi}) & (k = +1) \\ 1 & (k = 0) \\ \cosh(\bar{\chi}) & (k = -1) \end{cases} \quad (24a)$$

$$= \frac{d \text{senn}_k(\bar{\chi})}{d\bar{\chi}} \quad (24b)$$

Aqui introduzimos uma notação para a chamada curvatura gaussiana destas variedades tri-dimensionais maximalmente simétricas:

$$K := k/R_0^2 \quad \implies \quad \text{sgn}(K) = k. \quad (25)$$

Tal grandeza está relacionada com o tri-escalar de curvatura de Ricci usual,  ${}^{(3)}R$ , por<sup>7</sup>

$$K = \frac{{}^{(3)}R}{6}. \quad (26)$$

---

<sup>7</sup>Para uma hipersuperfície de dimensão  $n$ , imersa numa variedade euclidiana de dimensão  $n + 1$ , a relação é

$$K = \frac{R}{n(n-1)}.$$

Se definirmos a nova coordenada  $r$  para ser o “raio areal”,

$$r := \frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{senn}_k(\sqrt{|K|}\chi) \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \Updownarrow \\ \chi &= \frac{1}{\sqrt{|K|}} \operatorname{arcsenn}_k(\sqrt{|K|}r), \end{aligned} \quad (27b)$$

a expressão para o elemento de linha (21) também pode ser escrita como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (28)$$

Doravante, sistematicamente, referir-nos-emos à coordenada  $\chi$  como o *raio natural* e à coordenada  $r$  como o *raio areal*, para qualquer  $k = 0, \pm 1$ .

## 2.5 O desvio para o vermelho $z$

Na aproximação de ótica geométrica ou eiconal ou altas frequências, um campo eletromagnético pode ser descrito através de linhas de universo geodésicas do tipo nulo:

$$k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta = 0 \quad (29a)$$

$$g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0. \quad (29b)$$

Aqui  $k^\alpha$  é o quadri-vetor de onda, cuja componente temporal pode ser pensada como a frequência angular dividida por  $c$  e as componentes espaciais como o tri-vetor de onda. Dados um emissor e um receptor (observador) genéricos, num espaço-tempo arbitrário, o desvio para o vermelho sofrido por um fóton ao se deslocar entre os eventos de emissão e recepção (observação) é definido por

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (30)$$

No caso particular de uma métrica de Robertson-Walker, com emissor e detector comóveis, obtém-se (cf. Fig. 1)

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \quad (31a)$$

$$= \frac{dt_0}{dt_e} \quad (31b)$$

$$= \frac{1}{a(t)}. \quad (31c)$$

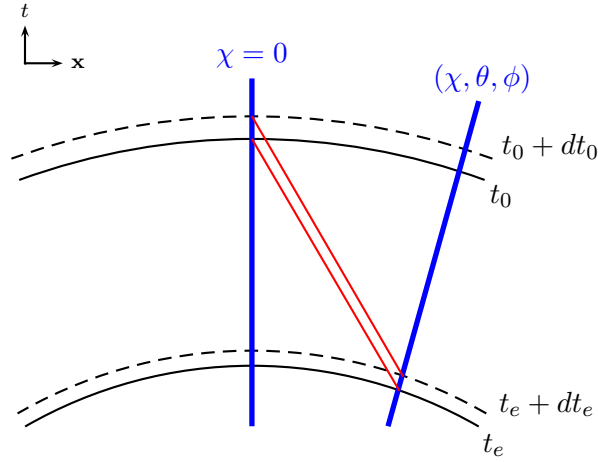


Figura 1: Emissão e recepção.

onde supusemos que  $a(t_0) = a_0 = 1$  e  $a(t_e) = a(t)$ .

Consideremos, agora, as geodésicas do tipo nulo da Fig. 1, representadas como curvas inclinadas em vermelho. Ao longo delas, o intervalo é zero e, por isotropia (já que o observador/receptor foi tomado na origem),  $\theta = \text{const}$  e  $\phi = \text{const}$ . Destarte,

$$\frac{cdt}{a(t)} = -d\chi, \quad (32)$$

onde a raiz com sinal negativo deve-se ao fato de o fóton assumir valores progressivamente menores de  $\chi$  conforme cresce o tempo cósmico. Lembrando a definição do parâmetro de Hubble,

$$H := \frac{\dot{a}}{a} \quad (33)$$

$$= -\frac{\dot{z}}{1+z}, \quad (34)$$

podemos reescrever (32) como

$$\frac{cdz}{H(z)} = d\chi. \quad (35)$$

Daí, deduzimos que, a coordenada  $\chi$  de um evento sobre uma geodésica do tipo nulo que acaba atingindo o evento: (agora, aqui)  $\equiv (t = t_0, \chi = 0)$ , pode ser “recuperada” a partir do correspondente desvio para o vermelho  $z$  via

$$\chi(z) = D_{H0} \int_{z'=0}^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (36)$$

onde definimos

$$E(z) := \frac{H(z)}{H_0}, \quad (37)$$

que chamaremos de *parâmetro de Hubble adimensional* (ou *normalizado*), e

$$\boxed{D_H := \frac{c}{H}} \quad (38)$$

a *distância* (ou *raio*) *de Hubble*. Naturalmente, devido a (37), vale também

$$D_H = D_{H0}E(z). \quad (39)$$

### 3 Cosmodinâmica

No contexto cosmológico usual, com a geometria de fundo sendo a de Robertson-Walker e o conteúdo material total assumindo a forma de um fluido perfeito no referencial de Hubble, as equações de Einstein reduzem-se a duas equações independentes somente, que podem ser tomadas como a *equação de Friedmann* e a *equação de fluido*, respectivamente:

$$\frac{8\pi G\epsilon}{3c^2} - \frac{Kc^2}{a^2} = H^2 \quad (40)$$

$$\dot{\epsilon} + 3H(\epsilon + P) = 0. \quad (41)$$

Aqui aparecem a *densidade de energia (total)*  $\epsilon$  e a *pressão (total)*  $P$ .

Restringir-nos-emos a tratar de um sistema a  $N$  componentes ou espécies, não interagentes, cada uma das quais tem um tensor energia-momento com a forma de fluido perfeito no referencial de Hubble. A razão piezoenergética  $w_i := (i = 1, \dots, N)$  de cada espécie será tomada como[4]

$$w_i := \frac{a\tilde{w}(a) - a_{trans}}{a + a_{trans}}, \quad (42)$$

onde

Chevallier-Polarski-Linder[5, 6]:

$$w_i := w_{0i} + w_{ai}(1 - a) \quad (43)$$

$$= w_{0i} + w_{ai} \frac{z}{1 + z}, \quad (44)$$

onde  $w_{0i} = \text{const}$  e  $w_{ai} = \text{const}$ .

Com isto, a densidade de energia pode ser integrada, a partir de (41), para obter

$$\epsilon_i = \epsilon_{i0} a^{-3(1+w_{0i}+w_{ai})} e^{-3w_{ai}(1-a)} \quad (45)$$

$$= \epsilon_{i0} (1+z)^{3(1+w_{0i}+w_{ai})} e^{-3w_{ai}z/(1+z)}. \quad (46)$$

Substituindo esta em (40), obtemos

$$E(z) := \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+w_{0i}+w_{ai})} e^{-3w_{ai}z/(1+z)} + \Omega_{K0} (1+z)^2}. \quad (47)$$

## 4 Distância própria $D$

De certa forma, a distância própria é a mais primitiva e geometricamente mais pura de todas as distâncias usualmente definidas em cosmologia. De fato, dado que o espaço-tempo de Robertson-Walker admite uma foliação global 3+1, com folhas dadas por  $t = \text{const}$ , pode-se pensar que tais folhas são as hipersuperfícies de simultaneidade para os observadores de Hubble.<sup>8</sup> Consideremos dois tais observadores: um, sem perda de generalidade, devido à homogeneidade, na origem,  $\chi = 0$ , e outro com coordenadas genéricas  $(\chi, \theta, \phi)$ . Como tais observadores apresentam um movimento relativo, devemos tomar (em contraste com a distância comóvel, a ser definida na próxima seção) o cuidado de indicar o instante a que nos referimos. Concretamente, a *distância própria*  $D(t)$ , entre tais observadores, *no instante*  $t$ , é o intervalo ou comprimento da geodésica do tipo espacial,  $C$ , que liga as suas linhas de universo, no instante  $t$ , ou seja,

$$\boxed{D(t) := \int_C a(t) dl.} \quad (48)$$

Como, devido à isotropia, devemos ter  $\theta = \text{const}$  e  $\phi = \text{const}$  ao longo da geodésica, (21) fornece diretamente

$$D(t) = \int_{\chi'=0}^{\chi} a(t) d\chi',$$

isto é,

$$D(t) = a(t)\chi. \quad (49)$$

---

<sup>8</sup>Tais hipersuperfície constituem o chamado “espaço público” de Rindler [3].

## 5 Distância comóvel (longitudinal) $D_C$

A expansão relativa entre observadores de Hubble pode ser formalmente cancelada, fazendo-se de conta que o fator de escala é constante. Isto sugere definirmos uma *distância comóvel (longitudinal)*  $D_C$ , entre os dois observadores  $\chi = 0$  e  $(\chi, \theta, \phi)$ , como a distância própria no instante  $t$  dividida pelo fator de escala correspondente, ou seja,

$$\boxed{D_C := D(t)/a(t)}, \quad (50)$$

que implica simplesmente

$$D_C = \chi, \quad (51)$$

e, como esperado, é independente do tempo.

## 6 Distância de diâmetro (ou tamanho) angular $D_A$

Considere, como motivação, na relatividade especial, um objeto na forma de um segmento retilíneo infinitesimal em repouso em um determinado referencial inercial, com comprimento próprio  $\delta\ell$ . Suponha que tal objeto esteja disposto perpendicularmente à sua “linha de visada” desde um certo observador/detector/receptor pontual, situado a uma distância  $R$  do objeto. Naturalmente, sob tais condições, o ângulo de visada subtendido pelo objeto no observador é dado por

$$\delta\alpha = \delta\ell/R \quad \Leftrightarrow \quad R = \delta\ell/\delta\alpha. \quad (52)$$

No contexto cosmológico, o que fazemos é adotar a segunda de tais expressões como a expressão para a distância de diâmetro angular, por definição. Concretamente, seja um objeto linear de extensão infinitesimal, comóvel (suas partículas movem-se todas no escoamento de Hubble), perpendicular à linha de visada, desde um observador pontual situado na origem  $\chi = 0$ . Suponha que tal objeto tenha coordenada radial comóvel  $\chi$  e comprimento próprio  $d\ell(t)$ ; então, a sua *distância de diâmetro angular*  $D_A(t)$ , no instante  $t$ , é definida como

$$\boxed{D_A(t) := \frac{\delta\ell(t)}{\delta\alpha}}. \quad (53)$$

Sem perda de generalidade, devido à isotropia, podemos calcular o comprimento próprio do objeto supondo que as extremidades do mesmo se situam

nas coordenadas espaciais  $(\chi, \theta, \phi)$  e  $(\chi, \theta + \delta\alpha, \phi)$  ou ainda  $(\chi, \pi/2, \phi)$  e  $(\chi, \pi/2, \phi + \delta\alpha)$ ; em qualquer hipótese, temos, pois, usando (21) ou (28),

$$D_A(t) = a(t) \operatorname{senn}_K(\chi) \quad (54a)$$

$$= a(t) r. \quad (54b)$$

## 7 Distância de volume comóvel $D_V$

Por (22) vê-se que ao congelar o tempo em  $t = t_0$  obtém-se o seguinte elemento de linha naquele tri-espaco:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (55)$$

Tomando um paralelogramo infinitesimal sobre a tri-esfera com elemento de linha como definido acima, vê-se que as projeções sobre cada um dos eixos coordenados  $(r, \theta, \phi)$  são dadas por:

$$\begin{cases} dl_r = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}; \\ dl_\theta = r d\theta; \\ dl_\phi = r \operatorname{sen}\theta d\phi. \end{cases} \quad (56)$$

Ao tomar-se o produto dos comprimentos dos lados, obtém-se o volume infinitesimal desse paralelogramo, logo

$$dV = \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi. \quad (57)$$

Sabe-se que um ângulo sólido infinitesimal nessa esfera é dado por

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (58)$$

onde  $r$  é o raio da esfera centrada no observador e  $dA$  é dado por

$$dA = dl_\theta dl_{\phi} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \quad (59)$$

logo,

$$d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi. \quad (60)$$

Substituindo (182) em (179)

$$dV = \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} d\Omega. \quad (61)$$

Pode-se explicitar  $r$  como função de  $z$ , logo

$$dr = d[r(z)] = \frac{dr}{dz} dz, \quad (62)$$

substituindo na expressão acima

$$dV = \frac{r^2 \frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 - Kr^2}} dz d\Omega. \quad (63)$$

Fixando-se o valor de  $t$ ,  $dt = 0$  e, por (22)

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (64)$$

Se  $t = t(a)$ , então

$$dt = \frac{dt}{da} da \quad (65)$$

e

$$\frac{cdt}{a} = \frac{\frac{dt}{da} da}{a} \quad (66)$$

como  $a = 1/(1+z)$ ,  $da = -a^2 dz$ . Então

$$\frac{cdt}{a} = \frac{cdz}{\frac{\dot{a}}{a}} = c \frac{dz}{H(z)}. \quad (67)$$

logo,

$$c \frac{dz}{H(z)} = c \frac{dz}{H_0 E(z)} \quad (68)$$

$$= \frac{D_{H_0}}{E(z)} dz. \quad (69)$$

Porém, por (186) a (191)

$$\frac{D_{H_0}}{E(z)} dz = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (70)$$

Se  $r = r(z)$

$$\frac{D_{H_0}}{E(z)} dz = \frac{\frac{dr}{dz} dz}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (71)$$

ou

$$\left( \frac{D_{H_0}}{E(z)} - \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 - Kr^2}} \right) dz = 0 \quad (72)$$

como  $dz \geq 0$ ,

$$\frac{D_{H_0}}{E(z)} = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (73)$$

Portanto (185) fica

$$dV = r^2 \frac{D_{H_0}}{E(z)} dz d\Omega. \quad (74)$$

Por (101) e (132) e (26), vê-se, então, que

$$dV = \frac{(1+z)^2 D_A^2 D_{H_0}}{E(z)} dz d\Omega. \quad (75)$$

## 8 Distância de luminosidade $D_L$

Sabe-se que num espaço euclidiano a luminosidade de bolométrica, ou seja, integrada sobre todos os comprimentos de onda ou, equivalentemente, sobre todas as frequências, de uma fonte em repouso relaciona-se com o fluxo bolométrico medido sobre uma superfície esférica de raio  $D_L$  centrada na fonte por:

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2}. \quad (76)$$

Pode-se então definir uma “distância de luminosidade” como sendo

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}} \quad (77)$$

### 8.1 Distância de luminosidade para um universo com métrica de Robertson-Walker

A luminosidade de uma fonte que equivale à sua potência, ou seja é a quantidade de energia emitida por intervalo de tempo e por intervalo de comprimento de onda. Essa grandeza é obtida a partir de medidas realizadas no referencial da fonte, portanto serão representadas com um subcrito ( $e$ ) que significa que são tomadas na emissão. Portanto

$$L_\lambda(\lambda_e) := \frac{d^2 E_e}{d\lambda_e dt_e}. \quad (78)$$

Logo,

$$d^2 E_e = L_\lambda(\lambda_e) d\lambda_e dt_e. \quad (79)$$

O fluxo é dado pela energia que passa através de um elemento de superfície, por intervalo de tempo, por intervalo de comprimento de onda. Nesse caso as medidas são feitas no referencial do observador e serão representadas com um subscrito ( $o$ ) que significa observação. Portanto,

$$f_\lambda(\lambda_o) := \frac{d^3 E_o}{d\lambda_o dt_o dA_o}. \quad (80)$$

Logo,

$$d^3 E_o = f_\lambda(\lambda_o) d\lambda_o dt_o dA_o. \quad (81)$$

$$d^2 E = f_\lambda(\lambda_o) d\lambda_o dt_o \int_S dA_o \quad (82)$$

$$= f_\lambda(\lambda_o) d\lambda_o dt_o \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi S_K^2(\chi) \sin^2 \theta d\theta \quad (83)$$

$$= 4\pi S_K^2(\chi) f_\lambda(\lambda_o) d\lambda_o dt_o \quad (84)$$

levando em conta a conservação do número de fótons,

$$d^2 N_e = d^2 N_o \quad (85)$$

e tendo em vista as seguintes relações:

$$\lambda_e = \frac{\lambda_o}{1+z}; \quad dt_e = \frac{dt_o}{1+z}, \quad (86)$$

e que a energia se cada fóton é  $hc/\lambda$  tem-se que

$$d^2 N_e = \frac{d^2 E_e}{\frac{hc}{\lambda_e}} = \frac{d^2 E_o}{\frac{hc}{\lambda_o}} = d^2 N_o \quad (87)$$

então,

$$d^2 E_e \lambda_e = d^2 E_o \lambda_o, \quad (88)$$

e,

$$L_\lambda(\lambda_e) \lambda_e d\lambda_e dt_e = 4\pi S_K^2 f_{\lambda_o}(\lambda_o) d\lambda_o \lambda_o dt_o \quad (89)$$

pelas relações (125) tem-se que

$$L_\lambda \frac{(\lambda_e) \lambda_o d\lambda_o dt_o}{(1+z)^3} = 4\pi S_K^2 f_{\lambda_o}(\lambda_o) d\lambda_o \lambda_o dt_o. \quad (90)$$

Portanto,

$$f_{\lambda_o}(\lambda_o) = \frac{L_\lambda(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^3 S_K^2}. \quad (91)$$

Pode-se integrar os dois lados da equação acima em  $d\lambda_o$  para obter o fluxo e a luminosidade bolométricos.

$$\int_0^\infty \left( f_{\lambda_o}(\lambda_o) = \frac{L_\lambda(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^3 S_K^2} \right) d\lambda_o. \quad (92)$$

$$\int_0^\infty f_{\lambda_o}(\lambda_o) d\lambda_o = \left( \frac{L_\lambda(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^3 S_K^2} \right) (1+z) d\lambda_e. \quad (93)$$

$$\therefore f_{\lambda_o}(\lambda_o) = \frac{L_\lambda(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^2 S_K^2}. \quad (94)$$

Comparando com (115) pode-se definir

$$D_L := (1+z)S_K(\chi) = (1+z)r(\chi). \quad (95)$$

Pode-se seguir o mesmo raciocínio acima usando o fluxo e a luminosidade em termos da frequência ao invés do comprimento de onda, basta considerar que  $\lambda\nu = c$ .

$$d(\lambda\nu = c), \quad (96)$$

então,

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu. \quad (97)$$

Temos ainda que o fluxo medido em termos do comprimento de onda deve ser o mesmo que o medido em termos da frequência, portantoo:

$$f_\lambda|d\lambda| = f_\nu|d\nu|, \quad (98)$$

logo

$$\begin{cases} \lambda f_\lambda(\lambda) = \nu f_\nu(\nu) \\ \lambda L_\lambda(\lambda) = \nu L_\nu(\nu) \end{cases} \quad (99)$$

Sabendo que  $\nu_e = (1+z)\nu_o$ ,

$$L_\nu \frac{(\nu_e)\nu_o d\nu_o dt_o}{(1+z)} = 4\pi S_K^2 f_{\nu_o}(\nu_o) d\nu_o \nu_o dt_o. \quad (100)$$

$$\int_0^\infty f_{\nu_o}(\nu_o) dt_o = \left( \frac{L_\nu(\nu_e)}{4\pi(1+z)S_K^2} \right) \frac{d\nu_e}{(1+z)}. \quad (101)$$

$$\therefore f_{\nu_o}(\nu_o) = \frac{L_\nu(\nu_e)}{4\pi(1+z)^2 S_K^2}. \quad (102)$$

Novamente vê-se que

$$D_L := (1+z)S_K(\chi) = (1+z)r(\chi). \quad (103)$$

## 9 Distância de movimento próprio $D_M$

Observando as mesmas considerações feitas para definir a distância comóvel transversa e que, além disso, as fontes se movam com uma velocidade  $V_\perp$  entre si, perpendicularmente à linha-de-visada, em um tempo  $\Delta t$  ela terá se deslocado uma distância  $\Delta \bar{D} = V_\perp \Delta t$ .

Nesse caso, o distância própria entre as fontes é dada por

$$\bar{D} = (D\delta) = a(t)r(\chi)\delta \quad (104)$$

onde  $D$  é a distância própria.

$$\Delta \bar{D} = V_\perp \Delta t = V_\perp \Delta t_0 \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (105)$$

Por (94) tem-se que,

$$\delta = \frac{\bar{D}}{a(t)r(\chi)} \quad (106)$$

logo,

$$\Delta \delta = \frac{\Delta \bar{D}}{a(t)r(\chi)} = \frac{V_\perp \Delta t_0}{a(t_0)r(\chi)}. \quad (107)$$

Num espaço euclídeano teria-se

$$\alpha = \frac{x}{d} \quad (108)$$

Onde  $x$  é a separação entre duas fontes ,  $d$  é a distância entre elas e o observador e  $\alpha$  é o ângulo por elas subtendido. Tem-se também que ( $\dot{\alpha} = \dot{x}/d$ ). Analogamente,

$$\mu := \frac{\Delta\delta}{\Delta t_0} = \frac{V_{\perp}}{D_M}, \quad (109)$$

A nova variável acima  $D_M$  recebe o nome de distância de movimento próprio pois está relacionada à variação da distância própria entre as duas fontes no referencial das mesmas. Logo,

$$D_M := \frac{V_{\perp}}{\mu} = \frac{V_{\perp}}{\Delta t_0 / \Delta\delta} = \frac{V_{\perp} \Delta t_0}{\Delta\delta} \quad (110)$$

substituindo (97) em (100) obtém-se, portanto

$$D_M = a(t_0)r(\chi). \quad (111)$$

Por (66) e (67) vê-se que

$$\chi(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (112)$$

portanto tem-se três soluções diferentes, que dependem se  $K = 0$ ,  $K > 0$  ou  $K < 0$ .

Para  $K > 0$ :

$$\chi(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (113)$$

renomeando  $\sqrt{|K|r}$  como  $\text{sen}\theta$ , logo

$$\chi(r) = \int_0^{\text{sen}^{-1}(\sqrt{|K|r})} \left( \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{|K|}\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}} \right) \quad (114)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{sen}^{-1}(\sqrt{|K|r}). \quad (115)$$

Para  $K = 0$ :

$$\chi(r) = r. \quad (116)$$

E para  $K < 0$ :

$$\chi(r) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{senh}^{-1}(\sqrt{|K|r}). \quad (117)$$

Portanto

$$\chi(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{sen}^{-1}(\sqrt{|K|r}) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{senh}^{-1}(\sqrt{|K|r}) & (K < 0). \end{cases} \quad (118)$$

Invertendo

$$r(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{sen}(\sqrt{|K|\chi}) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \text{senh}(\sqrt{|K|\chi}) & (K < 0). \end{cases} \quad (119)$$

Levando em conta (20) e (38) e (39) tem-se que

$$|K| = \left| \Omega_{K,0} \frac{H_0^2}{c^2} \right| = \frac{H_0^2}{c^2} |\Omega_{K,0}| \quad (120)$$

pode-se, então escrever (109) como

$$r(\chi) = \begin{cases} \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{sen}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \chi \frac{H_0}{c}) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{senh}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \chi \frac{H_0}{c}) & (K < 0). \end{cases} \quad (121)$$

Vê-se pela (78) que

$$\chi(r) = D_C \quad (122)$$

logo,

$$r(\chi) = \begin{cases} D_{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{sen}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \frac{D_C}{D_{H_0}}) & (K > 0) \\ D_C & (K = 0) \\ D_{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{senh}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \frac{D_C}{D_{H_0}}) & (K < 0). \end{cases} \quad (123)$$

Comparando com (101) e como  $a(t_0) = a_0 = 1$ , por fim obtém-se

$$D_M = \begin{cases} D_{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{sen}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \frac{D_C}{D_{H_0}}) & (K > 0) \\ D_C & (K = 0) \\ D_{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K,0}|}} \text{senh}(\sqrt{|\Omega_{K,0}|} \frac{D_C}{D_{H_0}}) & (K < 0). \end{cases} \quad (124)$$

## 10 Distância de contagem de fótons $D_P$

Segundo o mesmo raciocínio anterior, define-se uma grandeza que meça o número de fótons emitidos pela fonte, por intervalo de comprimento de onda, ou frequência, mas sem levar em conta o intervalo de tempo. O mesmo faz-se para definir o fluxo de fótons na observação. Portanto,

$$L_{P\lambda}(\lambda_e) := \frac{dN_e}{d\lambda_e}. \quad (125)$$

$$dN_e = L_{P\lambda}(\lambda_e) d\lambda_e. \quad (126)$$

$$f_{P\lambda}(\lambda_e) := \frac{d^2 N_o}{d\lambda_o dA_o}. \quad (127)$$

$$d^2 N_o = f_{P\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o dA_o. \quad (128)$$

Integrando  $d^2 N_o$  sobre toda a superfície fechada que encerra a fonte,

$$dN_o = f_{P\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o 4\pi S_K^2(\chi). \quad (129)$$

Considerando, novamente, a conservação do número de fótons,  $dN_e = dN_o$ ,

$$L_{P\lambda}(\lambda_e) d\lambda_e = 4\pi S_K^2 f_{P\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o \quad (130)$$

$$\frac{L_{P\lambda}(\lambda_e) d\lambda_o}{(1+z)} = 4\pi S_K^2 f_{P\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o \quad (131)$$

$$\int_0^\infty \left( f_{P\lambda}(\lambda_o) = \frac{L_{P\lambda}(\lambda_e)}{4\pi(1+z)S_K^2} \right) d\lambda_o \quad (132)$$

$$f_P(\lambda_o) = \int_0^\infty \left( \frac{L_{P\lambda}(\lambda_e)}{4\pi(1+z)S_K^2} \right) (1+z) d\lambda_e \quad (133)$$

ou

$$f_P(\lambda_o) = \frac{L_P(\lambda_e)}{4\pi S_K^2}. \quad (134)$$

Portanto define-se

$$D_P := S_K(\chi) = r(\chi). \quad (135)$$

Que recebe o nome de distância de contagem de fótons. Por (101), já que  $a(t_0) = 0$ , vê-se que  $D_P \equiv D_M$ , muito embora as motivações que levaram à definição de cada uma dessas distâncias sejam bastantes distintas.

## 11 Distância de fluxo de fótons $D_F$

Pode-se definir uma grandeza análoga à luminosidade, mas que meça a quantidade  $dN_e$  de fótons emitida pela fonte por intervalo de tempo por intervalo de comprimento de onda, ou frequência. Além disso, define-se também uma outra grandeza análoga ao fluxo e que meça o numero de fótons  $dN_o$  que atravessa um elemento de superfície por intervalo de tempo por intervalo de comprimento de onda, ou de frequência. Portanto

$$L_{F\lambda}(\lambda_e) := \frac{d^2 N_e}{d\lambda_e dt_e}. \quad (136)$$

$$d^2 N_e = L_{F\lambda}(\lambda_e) d\lambda_e dt_e. \quad (137)$$

$$f_{F\lambda}(\lambda_o) := \frac{d^3 N_o}{d\lambda_o dt_o dA_o}. \quad (138)$$

$$d^3 N_o = f_{F\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o dt_o dA_o. \quad (139)$$

Integrando  $d^3 N_o$  sobre toda a superfície fechada que encerra a fonte,

$$d^2 N_o = f_{F\lambda}(\lambda_o) d\lambda_o dt_o 4\pi S_K^2(\chi). \quad (140)$$

Considerando a conservação do número de fótons,  $d^2 N_e = d^2 N_o$ ,

$$L_{F\lambda}(\lambda_e)d\lambda_e dt_e = 4\pi S_K^2 f_{F\lambda}(\lambda_o)d\lambda_o dt_o \quad (141)$$

$$\frac{L_{F\lambda}(\lambda_e)d\lambda_o dt_o}{(1+z)^2} = 4\pi S_K^2 f_{F\lambda}(\lambda_o)d\lambda_o dt_o \quad (142)$$

$$\int_0^\infty \left( f_{F\lambda}(\lambda_o) = \frac{L_{F\lambda}(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^2 S_K^2} \right) d\lambda_o \quad (143)$$

$$f_F(\lambda_o) = \int_0^\infty \left( \frac{L_{F\lambda}(\lambda_e)}{4\pi(1+z)^2 S_K^2} \right) (1+z)d\lambda_e \quad (144)$$

portanto,

$$f_F(\lambda_o) = \frac{L_F(\lambda_e)}{4\pi(1+z)S_K^2} \quad (145)$$

pode-se então definir

$$D_F^2 := (1+z)S_K^2(\chi) \quad (146)$$

logo,

$$D_F = (1+z)^{1/2} S_K(\chi) = (1+z)^{1/2} r(\chi). \quad (147)$$

Que é chamada distância de fluxo de fótons.

## 12 Módulo de Distância $\mu$

Define-se módulo de distância  $\mu$  como a diferença da magnitude aparente  $m$  pela magnitude absoluta  $M$  de uma fonte. A magnitude aparente de uma fonte está relacionada com a sua densidade de fluxo e a magnitude absoluta é definida como sendo a magnitude aparente que essa fonte teria se estivesse a dez parsecs do observador e em repouso com relação a ele. Portanto,

$$\mu := m - M. \quad (148)$$

Logo

$$\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{10pc} \right) \quad (149)$$

$$= 5 \log_{10} \left( \frac{(1+z)D_M}{10pc} \right) \quad (150)$$

$$= 5 \log_{10} \left( \frac{(1+z)D_H E(z)}{10pc} \right) \quad (151)$$

$$= 5 \log_{10} \left[ \left( \frac{(1+z)}{10pc} \right) \left( \frac{30000}{h} Mpc \right) E(z) \right] \quad (152)$$

$$= 5 \log_{10} \left( \frac{3 \times 10^8 (1+z) E(z)}{h} \right) \quad (153)$$

$$= 5 \log_{10} [ 3 \times 10^8 (1+z) E(z) ] - 5 \log_{10}(h). \quad (154)$$

$$\therefore \mu + 5 \log_{10}(h) = 5 \log_{10} [ 3 \times 10^8 (1+z) E(z) ] . \quad (155)$$

Onde  $h$  é definido como

$$\frac{H_0}{100} \text{km}^{-1} \text{s Mpc}. \quad (156)$$

Verifica-se facilmente que, para  $z \geq 0$ :

$$d_T = D_A \leq D_P = D_M \leq D_F \leq D_L. \quad (157)$$

E para  $z < 0$ :

$$d_T = D_A \geq D_P = D_M \geq D_F \geq D_L. \quad (158)$$

### 13 Equações de Friedmann e de fluido

Pode-se Definir  $H(z)$  como

$$H(z) := H_0 E(z). \quad (159)$$

Onde  $H_0$  é o valor da constante de Hubble hoje. Temos, pela equação de Friedmann, que

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)}. \quad (160)$$

Definindo um parâmetro adimensional de densidade com a seguinte forma

$$\Omega(t) := \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{cr}(t)}, \quad (161)$$

onde,

$$\epsilon_{cr}(t) := \frac{3c^2 H^2(t)}{8\pi G} \quad (162)$$

que é exatamente a densidade crítica necessária para que a tri-curvatura seja nula. Portanto

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0 a^2(t) H^2(t)} \quad (163)$$

e,

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (164)$$

Pode-se, então, tomar agora um novo parâmetro de densidade  $\Omega_{K,0}$  que mede a tri-curvatura do espaço:

$$\Omega_{K,0} := 1 - \Omega_0 \quad (165)$$

portanto

$$\frac{k}{R_0^2} = -\frac{H_0^2}{c^2} \Omega_{K,0} \quad (166)$$

reescrevendo a equação de Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) + \frac{H_0^2}{a^2(t)} \Omega_{K,0} \quad (167)$$

dividindo por  $H_0^2$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{cr,0}} + \frac{\Omega_{K,0}}{a^2(t)} \quad (168)$$

$$= \bar{\Omega}_0(t) + \frac{\Omega_{K,0}}{a^2(t)} \quad (169)$$

$$= \bar{\Omega}_0(t) + \Omega_{K,0}(1+z)^2. \quad (170)$$

Portanto,

$$E(z) = \sqrt{\bar{\Omega}_0 + \Omega_{K,0}(1+z)^2}. \quad (171)$$

Por outro lado, a equação de fluido que descreve a expansão do universo é:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0, \quad (172)$$

ou,

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w) = 0. \quad (173)$$

Onde  $P$  representa a pressão do fluido sobre as “paredes do universo” e,

$$P = w\epsilon. \quad (174)$$

Sendo que  $w$  é um número adimensional. Considerando que  $w$  assuma a forma

$$w = w_0 + w_1(1 - a). \quad (175)$$

A equação de fluido fica

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a} \{1 + [w_0 + w - 1(1 - a)]\} = 0. \quad (176)$$

Resolvendo essa equação diferencial para  $\epsilon$  obtém-se

$$\epsilon = \frac{C}{a^{3(1+w_0+w_1)}} \frac{1}{e^{3w_1a}} \quad (177)$$

Onde  $C$  é uma constante de integração. Fazendo  $a = a(t_0) = 1$  na equação acima obtém-se para  $C$  uma expressão do tipo:

$$C = \epsilon_0 e^{3w_1}. \quad (178)$$

Substituindo  $C$  na equação (51):

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0 e^{3w_1}}{a^{3(1+w_0+w_1)}} \frac{1}{e^{3w_1 a}} \quad (179)$$

$$= \frac{\epsilon_0 e^{3w_1(1-a)}}{a^{3(1+w_0+w_1)}}. \quad (180)$$

Como

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{\epsilon}{\epsilon_{cr,0}}, \quad (181)$$

Tem-se que, de acordo com a equação (35),

$$\Omega_0 = \Omega(0) = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon_{cr}(0)} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{cr,0}}. \quad (182)$$

Logo,

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (183)$$

então,

$$\epsilon_0 = \epsilon \frac{\Omega_0}{\bar{\Omega}_0} \quad (184)$$

a equação (54) fica

$$\epsilon = \epsilon \frac{\Omega_0}{\bar{\Omega}_0} \frac{e^{3w_1(1-a)}}{a^{3(1+w_0+w_1)}} \quad (185)$$

Portanto,

$$\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \frac{e^{3w_1(1-a)}}{a^{3(1+w_0+w_1)}}. \quad (186)$$

Finalmente tem-se que

$$E(z) = \sqrt{\Omega_0 \frac{e^{3w_1(1-a)}}{a^{3(1+w_0+w_1)}} + \Omega_{K,0}(1+z)^2}. \quad (187)$$

Pode-se generalizar a expressão acima para um universo com várias componentes. Basta escrever os parâmetros  $w_0$ ,  $w_1$  e  $\Omega_0$  com um índice ( $i$ ) correspondendo a cada uma das componentes que preenchem o universo e fazer o somatório em  $i$ .

$$E(z) = \sqrt{\sum_i \left( \Omega_{0i} \frac{e^{3w_{1i}(1-a)}}{a^{3(1+w_{0i}+w_{1i})}} \right) + \Omega_{K0}(1+z)^2}. \quad (188)$$

## Referências

- [1] I. M. H. Etherington, “On the definition of distance in general relativity”, *Phil. Mag* **15**, 761 (1933).
- [2] P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco, “Gravitational lenses.” Springer, New York (1992).
- [3] W. Rindler, “Essential relativity: special, general, and cosmological, 2nd. edition.” Springer, New York, USA (1977)
- [4] E. Komatsu *et alii*, “Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation”, arXiv:0803.0547.
- [5] M. Chevallier & D. Polarski, “Accelerating universes with scaling dark matter”, *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 213 (2001).
- [6] E. Linder, “Exploring the expansion history of the universe”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 091301 (2003).