UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA
INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA — 2012/2
PROF.: MAURÍCIO O. CALVÃO
PRIMEIRA LISTA DE PROBLEMAS
DATA DE ENTREGA: 30 de outubro

> PRIMEIRO PRINCÍPIO MORAL DE WHEELER: *Nunca faça um cálculo até que você saiba a resposta.* Faça uma estimativa antes de qualquer cálculo, tente um argumento físico simples (simetria! invariância! conservação!) antes de qualquer dedução; adivinhe ("chute") a resposta para qualquer enigma ("charada"). Coragem: ninguém mais precisa saber qual é o "chute". Portanto, faça-o rápido, por instinto. Um "chute" correto reforça este instinto. Um "chute" errado traz o refrigério da surpresa. De qualquer maneira, a vida como um perito do espaço-tempo, não importa a duração, é mais divertida! (*apud* E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics.*)

PROBLEMA 1 (*Grandezas de Planck*) [1,0 ponto(s)]

Mostre que, usando somente:

- a constante gravitacional de Newton: $G \simeq 6{,}7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$,
- o módulo da velocidade da luz no vácuo: $c \simeq 3{,}0 \times 10^{8}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,
- a constante de Planck reduzida: $\hbar \simeq 1{,}1 \times 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \simeq 6{,}6 \times 10^{-16}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{s}$, e
- a constante de Boltzmann: $k_{\mathrm{B}} \simeq 1{,}4 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \simeq 8{,}6 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{K}^{-1}$,

podemos construir, univocamente, grandezas, ditas de Planck, com dimensões de comprimento, tempo, massa, energia, densidade de massa, densidade de energia, temperatura, ..., dadas, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
L_{Pl} &:= \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \simeq 1{,}6 \times 10^{-35}\ \mathrm{m}\,, \\
t_{Pl} &:= \left(\frac{G\hbar}{c^5}\right)^{1/2} \simeq 5{,}4 \times 10^{-44}\ \mathrm{s}\,, \\
M_{Pl} &:= \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \simeq 2{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{kg}\,, \\
E_{Pl} &:= \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} \simeq 2{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{J} \simeq 1{,}2 \times 10^{28}\ \mathrm{eV}\,,
\end{aligned}
$$

$$\rho_{Pl} := \frac{c^5}{\hbar G^2} \simeq 5{,}1 \times 10^{96}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}\,,$$
$$\epsilon_{Pl} := \frac{c^7}{\hbar G^2} \simeq 4{,}9 \times 10^{113}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^{-3} \simeq 2{,}9 \times 10^{132}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{m}^{-3}\,,$$
$$T_{Pl} := \left(\frac{\hbar c^5}{G k_{\mathrm{B}}^2}\right)^{1/2} \simeq 1{,}4 \times 10^{32}\ \mathrm{K}\,,$$
$$\ldots .$$

Deduza, também, os fatores de conversão das seguintes tabelas:

Energia	1 GeV = $1{,}6 \times 10^{-10}$ J
Massa	1 GeV = $1{,}8 \times 10^{-27}$ kg
Temperatura	1 GeV = $1{,}2 \times 10^{13}$ K
Comprimento	1 GeV^{-1} = $2{,}0 \times 10^{-16}$ m
Tempo	1 GeV^{-1} = $6{,}6 \times 10^{-25}$ s
Densidade numérica de partículas	1 GeV^3 = $1{,}3 \times 10^{47}$ m^{-3}
Densidade de energia	1 GeV^4 = $2{,}1 \times 10^{37}$ J$\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Densidade de massa	1 GeV^4 = $2{,}3 \times 10^{20}$ kg$\cdot\mathrm{m}^{-3}$

Tabela 1: Fatores de conversão de unidades naturais para unidades do SI.

Energia	1 J = $6{,}2 \times 10^{9}$ GeV
Massa	1 kg = $5{,}6 \times 10^{26}$ GeV
Temperatura	1 K = $8{,}6 \times 10^{-14}$ GeV
Comprimento	1 m = $5{,}1 \times 10^{15}$ GeV^{-1}
Tempo	1 s = $1{,}5 \times 10^{24}$ GeV^{-1}
Densidade numérica de partículas	1 m^{-3} = $7{,}7 \times 10^{-48}$ GeV^3
Densidade de energia	1 J$\cdot\mathrm{m}^{-3}$ = $4{,}8 \times 10^{-38}$ GeV^4
Densidade de massa	1 kg$\cdot\mathrm{m}^{-3}$ = $4{,}3 \times 10^{-21}$ GeV^4

Tabela 2: Fatores de conversão de unidades do SI para unidades naturais.

PROBLEMA 2 (*Livre caminho médio*) [1,0 ponto(s)]

Suponha que, na Floresta de Sherwood, o raio médio de uma árvore é $R = 1$ m e que o número médio de árvores por unidade de área é $\Sigma = 0{,}005\ \mathrm{m}^{-2}$. Se Robin Hood atirar uma flecha numa direção arbitrária, o quão longe, na média, ela irá antes de atingir uma árvore?

PROBLEMA 3 (*Distância máxima de visada*) [1,0 ponto(s)]

Suponha que você está num universo infinitamente grande, infinitamente velho, no qual a densidade média de estrelas é $n_\star = 10^9$ Mpc^{-3} e o raio médio estelar é igual ao raio do Sol: $R_\star = R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km. O quão longe, na média, você poderia ver, em qualquer direção, antes que a sua linha de visada atingisse uma estrela? (Suponha que a geometria euclidiana padrão é satisfeita neste universo.) Se as estrelas estiverem apinhadas em galáxias, galáxias essas com uma densidade média $n_g \simeq 1$ Mpc^{-3} e raio médio $R_g \simeq 2$ kpc, o quão longe, na média, você poderia ver, em qualquer direção, antes que a sua linha de visada atingisse uma galáxia?

PROBLEMA 4 (*Fundo cósmico de microondas (CMB, do inglês "cosmic microwave background") e você*) [1,0 ponto(s)]

Já que você é principalmente feito de água, você é muito eficiente na absorção de fótons de microondas (por quê?). Se você estivesse no espaço intergalático, aproximadamente quantos fótons do CMB você absorveria por segundo? Qual é a taxa aproximada, em watts, com a qual você absorveria a energia radiativa do CMB? Desprezando outras entradas e saídas de energia, quanto tempo levaria para o CMB elevar sua temperatura de um nanokelvin (10^{-9} K)? (Você pode supor que o seu calor específico é o mesmo que o da água pura, ou seja, $C = 4200$ J$\cdot$kg$^{-1}\cdot$K^{-1}.)

PROBLEMA 5 (*Massas dos neutrinos*) [2,0 ponto(s)]

Suponha que a diferença entre o quadrado da massa do neutrino muônico e o quadrado da massa do neutrino eletrônico tenha o valor $[m^2(\nu_\mu) - m^2(\nu_e)]c^4 = 5 \times 10^{-5}$ eV^2 e que a diferença entre o quadrado da massa do neutrino tauônico e o quadrado da massa do neutrino muônico tenha o valor $[m^2(\nu_\tau) - m^2(\nu_\mu)]c^4 = 3 \times 10^{-3}$ eV^2. Que valores de $m(\nu_e), m(\nu_\mu)$ e $m(\nu_\tau)$ minimizam a soma $m(\nu_e) + m(\nu_\mu) + m(\nu_\tau)$, dados esses vínculos?

PROBLEMA 6 (*Hipótese da luz cansada*) [1,0 ponto(s)]

Uma hipótese utilizada para explicar a relação de Hubble é a "hipótese da luz cansada", apresentada, pela primeira vez, em 1929, por F. Zwicky. Tal hipótese afirma que o universo não está se expandindo, mas que os fótons simplesmente perdem energia conforme se movem através do espaço (por alguma maneira não explicada), com a perda de energia por unidade de distância sendo dada pela lei

$$\frac{dE}{dr} = -KE\,,$$

onde K é uma constante (positiva). Mostre que tal hipótese dá uma relação distância–desvio para o vermelho que é linear no limite $z \ll 1$. Qual deve ser o valor de K a fim de fornecer uma constante de Hubble $H_0 = 70$km$\cdot$s$^{-1}\cdot$Mpc^{-1}?

PROBLEMA 7 (*Distribuição de Planck e lei de Stefan-Boltzmann*) [2,0 ponto(s)]

A densidade de energia específica (por unidade de freqüência) de um corpo negro, a temperatura T, como função da freqüência ν, é dada pela famosa distribuição de Planck

$$\epsilon_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}$$

caso particular de uma distribuição de Bose-Einstein para partículas de massa (de repouso) zero e potencial químico também zero.

(a) Faça um programa, na linguagem de sua preferência (recomendo Python), que tenha como entrada a freqüência ν (em Hz) e a temperatura T (em K) e como saída a densidade de energia específica ϵ_ν. Com isso, faça os gráficos das distribuições planckianas, numa única figura, com ambos os eixos em escala logarítmica, para as seguintes temperaturas: $T/\mathrm{K} = 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$.

(b) Deduza daí a lei de Stefan-Boltzmann:

$$\epsilon(T) = a_{\mathrm{SB}} T^4 \,,$$

onde

$$a_{\mathrm{SB}} := \frac{\pi^2}{15} \frac{k_{\mathrm{B}}^4}{\hbar^3 c^3} = 7{,}56 \times 10^{-16} \mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}} \,.$$

PROBLEMA 8 (*Lei do deslocamento de Wien*) [1,0 ponto(s)]

Mostre que a distribuição de Planck dada acima atinge um máximo numa freqüência $\nu_{\max}$ que satisfaz a chamada lei do deslocamento de Wien:

$$\nu_{\max} = bT \,,$$

onde b é uma constante (positiva, obviamente), cuja expressão em termos de h e k_{B} deve ser determinada.