GABARITO DA 1ª LISTA

PROBLEMA 1

$$[G]_{SI} = \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}, \quad [c]_{SI} = \frac{m}{s}, \quad [\hbar]_{SI} = J \cdot s \quad \text{e} \quad [K_B]_{SI} = \frac{J}{K}$$

Notar que K_B é a única constante cuja unidade envolve K (Kelvin) e, portanto, só será usada para formar quantidades que envolvam essa mesma unidade.

- Comprimento de Planck:

A velocidade da luz no vácuo c envolve comprimento e tempo. Para eliminar a dependência com o tempo, temos que utilizar também G ou $\hbar$. Escolhendo G, por exemplo, temos então que dividir c^2 por G:

$$\left[\frac{c^2}{G}\right]_{SI} = \frac{m^2}{s^2}\frac{Kg\,s^2}{m^3} = \frac{Kg}{m}$$

Para eliminar a dependência com a massa, temos que utilizar também $\hbar$:

$$[\hbar]_{SI} = J \cdot s = Kg \cdot \frac{m^2}{s^2} s = \frac{Kg \cdot m^2}{s}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{c^2}{G\hbar}\right]_{SI} = \frac{Kg}{m}\frac{s}{Kg \cdot m^2} = \frac{s}{m^3}$$

Agora utilizamos c para eliminar a dependência com o tempo:

$$\left[\frac{c^3}{G\hbar}\right] = \frac{s}{m^3}\frac{m}{s} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{Pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}}$$

Como regra geral, se queremos construir uma determinada quantidade que tenha unidade, por exemplo, de comprimento, fazemos:

$$[L_{Pl}] = m$$

$$L_{Pl} = \hbar^{\alpha} G^{\beta} c^{\gamma}$$

$$m = [\hbar]_{SI}^{\alpha} [G]_{SI}^{\beta} [c]_{SI}^{\gamma} = \frac{Kg^{\alpha} m^{2\alpha}}{s^{\alpha}} \quad \frac{m^{3\beta}}{Kg^{\beta} s^{2\beta}} \quad \frac{m^{\gamma}}{s^{\gamma}}$$

$$m = Kg^{\alpha-\beta} \, m^{2\alpha+3\beta+\gamma} \, s^{-(\alpha+2\beta+\gamma)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \alpha = \frac{1}{2} \,, \quad \gamma = -\frac{3}{2} \qquad e \qquad \boxed{L_{Pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2}}$$

• Tempo de Planck:

$$[t_{Pl}] = s = [\hbar]_{SI}^{\alpha} [G]_{SI}^{\beta} [c]_{SI}^{\gamma} = \frac{Kg^{\alpha-\beta} m^{2\alpha+3\beta+\gamma}}{s^{\alpha+2\beta+\gamma}}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -1 \end{cases}$$

$$\beta = \alpha = \frac{1}{2} \quad e \quad \gamma = -\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_{Pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2}}$$

• Massa de Planck:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \beta = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{matrix} \qquad \boxed{M_{Pl} = \left(\frac{c\hbar}{G}\right)^{1/2}}$$

- Energia de Planck:

$$[E]_{SI} = J = \frac{Kg\, m^2}{s^2} \rightarrow$$ Podemos utilizar os resultados anteriores e escrever $E_{Pe} = \frac{M_{Pe} L_{Pe}^2}{t_{Pe}^2}$

ou usar o método dos itens anteriores:
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = 5/2 \end{matrix}$$

$$\boxed{E_{Pe} = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2}}$$

- Densidade de massa de Planck:

$$[\rho]_{SI} = \frac{Kg}{m^3} \Rightarrow \rho_{Pe} = \frac{M_{Pe}}{L_{Pe}^3} = \frac{c^{1/2}\hbar^{1/2}}{G^{1/2}} \frac{c^{9/2}}{\hbar^{3/2} G^{3/2}} = \frac{c^{10/2}}{G^{4/2}\hbar^{2/2}}$$

$$\boxed{\rho_{Pe} = \frac{c^5}{G^2 \hbar}}$$

- Densidade de energia de Planck:

$$[\varepsilon]_{SI} = \frac{J}{m^3} \Rightarrow \varepsilon_{Pe} = \frac{E_{Pe}}{L_{Pe}^3} = \frac{\hbar^{1/2} c^{5/2}}{G^{1/2}} \frac{c^{9/2}}{\hbar^{3/2} G^{3/2}} = \frac{c^{14/2}}{\hbar^{2/2} G^{4/2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{Pe} = \frac{c^7}{\hbar G^2}}$$

- Temperatura de Planck:

$$[T] = K = [\hbar]_{SI}^{\alpha} [G]_{SI}^{\beta} [c]_{SI}^{\gamma} [K_B]_{SI}^{\eta}$$

$$K = \frac{Kg^{\alpha} m^{2\alpha}}{s^{\alpha}} \frac{m^{3\beta}}{Kg^{\beta} s^{2\beta}} \frac{m^{\gamma}}{s^{\gamma}} \frac{Kg^{\eta} m^{2\eta}}{s^{2\eta} K^{\eta}}$$

$$K = \frac{Kg^{\alpha - \beta + \eta} \cdot m^{2\alpha + 3\beta + \gamma + 2\eta}}{s^{\alpha + 2\beta + \gamma + 2\eta} \cdot K^{\eta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \eta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma + 2\eta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + 2\eta = 0 \end{cases} \quad \text{com } \eta = -1$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 1/2 \\ \beta &= -1/2 \\ \gamma &= 5/2 \end{aligned}$$

$$\boxed{T_{Pl} = \left(\frac{\hbar c^5}{G K_B^2} \right)^{1/2}}$$

Segunda parte do problema:

- 1eV é a energia que ganha um elétron acelerado sob uma diferença de potencial de 1V = 1 J/C.

$$1eV = 1 \frac{J}{C} \cdot e = 1 \frac{J}{\cancel{C}} \cdot 1{,}6 \times 10^{-19} \cancel{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 GeV = 1{,}6 \times 10^{-10} J}$$

- $J = Kg \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow 1 GeV = Kg \frac{m^2}{s^2} \times 1{,}6 \times 10^{-10}$

$(E = mc^2)$

$$\frac{1 GeV}{c^2} = Kg \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{s^2}} \frac{\cancel{s^2}}{9 \times 10^{16} \cancel{m^2}} \times 1{,}6 \times 10^{-10} = 1{,}78 \times 10^{-27} Kg$$

- $1 GeV = 1{,}6 \times 10^{-10} \; J$

$(E = K_B T)$

$$\frac{1 GeV}{K_B} = \frac{1{,}6 \times 10^{-10} \; J}{1{,}4 \times 10^{-23} \; J} K = 1{,}14 \times 10^{13} K$$

- $$\frac{1 GeV}{\hbar c} = \frac{1{,}6 \times 10^{-10} \cancel{J}}{1{,}05 \times 10^{-34} \cancel{J} \cdot \cancel{s}} \frac{1}{3 \times 10^8} \frac{\cancel{s}}{m} = 0{,}51 \times 10^{16} m^{-1}$$

$(E = h\nu = hc/\lambda)$

$$1 GeV^{-1} \hbar c = 2 \times 10^{-16} m$$

- $$\frac{1 GeV}{\hbar} = \frac{1{,}6 \times 10^{-10} J}{1{,}05 \times 10^{-34} J.s} = 1{,}52 \times 10^{24} s^{-1} \qquad (E = h\nu)$$

$$1 GeV^{-1} \hbar = 6{,}6 \times 10^{-25} s$$

• $[n] = m^{-3}$

$$\frac{1\,GeV^3}{\hbar^3 c^3} = (0,51)^3 \times 10^{48}\, m^{-3} = 1,3 \times 10^{47}\, m^{-3}$$

• $[\varepsilon] = \dfrac{J}{m^3}$

$$1\,GeV \cdot \frac{1\,GeV^3}{\hbar^3 c^3} = 1,6 \times 10^{-10}\, J \times 1,3 \times 10^{47}\, m^{-3} = 2,1 \times 10^{37}\, \frac{J}{m^3}$$

• $[\rho] = \dfrac{Kg}{m^3}$

$$\frac{1\,GeV}{c^2} \cdot \frac{1\,GeV^3}{\hbar^3 c^3} = 1,78 \times 10^{-27}\, Kg \times 1,3 \times 10^{47}\, m^{-3} = 2,3 \times 10^{20}\, \frac{Kg}{m^3}$$

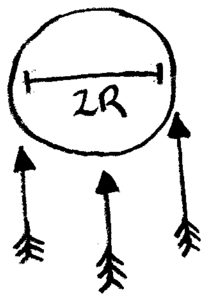
PROBLEMA 2

A flecha colide com uma árvore se tocar qualquer ponto do tronco de raio $R = 1m$.

O livre caminho médio é dado por:

$$l = \frac{1}{\sigma . \Sigma},$$

onde $\Sigma = 0,005\, m^{-2}$ é a densidade superficial de árvores e σ é o equivalente, em duas dimensões, da seção de choque:



$$\sigma = 2R$$

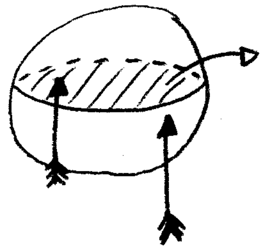
$$\Rightarrow l = \frac{1}{2 \times 0,05}\, m = 100\, m \quad //$$

PROBLEMA 3

Esse problema é o equivalente do problema anterior em três dimensões.

a) $l = \dfrac{1}{\sigma . n_*}$, $n_* = 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$

σ agora é a área da seção máxima da estrela:



$\sigma = \pi R_\odot^2$

$R_\odot = 7 \times 10^5 \text{ Km}$
$= 2{,}27 \times 10^{-14} \text{ Mpc}$

$R_\odot^2 = 5{,}2 \times 10^{-28} \text{ Mpc}^2$

$$l = \frac{1}{\pi . 5{,}2 \times 10^{-28} . 10^9} \text{ Mpc} \sim 6 \times 10^{17} \text{ Mpc} //$$

b) $R_g = 2 \text{Kpc} = 2 \times 10^{-3} \text{ Mpc}$
$n_g = 1 \text{ Mpc}^{-3}$

$$l = \frac{1}{\pi R_g^2 n_g} = \frac{1}{\pi . 4 \times 10^{-6}} \sim 8 \times 10^4 \text{ Mpc} //$$

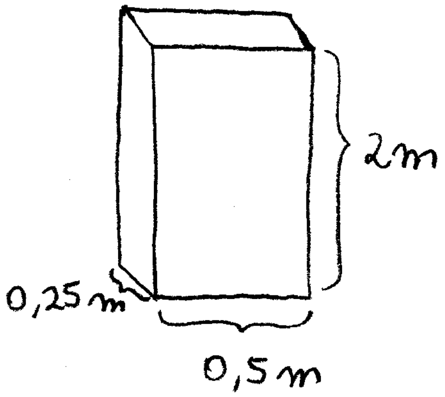
PROBLEMA 4

a) Em um cubo de volume $1 m^3$, existem $4{,}11 \times 10^8$ fótons da CMB, 1/6 dos quais, em média, atravessará cada uma das 6 faces do cubo, já que observações indicam grande isotropia na CMB.

Cada fóton se move com velocidade c e, portanto, o número de fótons da CMB que atravessa um cubo de área total A por segundo é dado por:

$$N = A \times n_\gamma \times c \times \frac{1}{6} \text{ fótons/s} \quad , \quad n_\gamma = 4{,}11 \times 10^8 \, m^{-3}$$

Podemos aproximar o formato do corpo por um paralelepípedo de lados 0,5m, 2m e 0,25 m:



$$\Rightarrow A = 2m \times 0{,}5m \times 2 + 2m \times 0{,}25m \times 2 + 0{,}25m \times 0{,}5m \times 2 = 3{,}25 \, m^2$$

$$\Rightarrow N = 3{,}25 \times 4{,}11 \times 10^8 \times 3 \times 10^8 \times 1/6 \sim 7 \times 10^{16} \text{ fótons/s}$$

b) Os fótons da CMB tem energia média

$$E_\gamma = 6{,}34 \times 10^{-4} \, eV$$

Watts = J/s

$E_\gamma = 10^{-22} J$

$$\Rightarrow 7 \times 10^{16} \text{ fótons/s} \times 10^{-22} \text{ J/fóton} = 7 \times 10^{-6} W$$

c) $C = 4200 \, J \, Kg^{-1} K^{-1}$

M ≡ massa aproximada de um ser humano = 70 Kg

$\Delta T = 10^{-9} K$

O tempo necessário para elevar 70 Kg de água de um temperatura ΔT é:

$$\frac{C \times M \times \Delta T}{\text{taxa}} = 42 s$$

↳ $7 \times 10^{-6} W$ (item anterior)

PROBLEMA 6

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad ; \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$\Rightarrow z = \frac{E_{obs}^{-1} - E_{em}^{-1}}{E_{em}^{-1}} = \frac{E_{em}}{E_{obs}} - 1 \quad (i)$$

$$\frac{dE}{dr} = -KE \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{E} = -K\,dr$$

$$\int_{E_{em}}^{E_{obs}} \frac{dE}{E} = -K \int_0^r dr' \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{E_{obs}}{E_{em}}\right) = -Kr$$

$$\frac{E_{obs}}{E_{em}} = e^{-Kr} \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i):

$$z = e^{Kr} - 1$$

$$\Rightarrow e^{Kr} = z + 1$$
$$Kr = \ln(z+1)$$

Expandindo em série de Taylor em torno de $z=0$:

$$\ln(z+1) = \ln(1) + \frac{1}{z+1} z - \frac{1}{(z+1)^2}\frac{z^2}{2} + \ldots = \frac{z}{z+1} - \frac{z^2}{2(z+1)} + \ldots$$

Se $z \ll 1$: $\ln(z+1) \sim z$

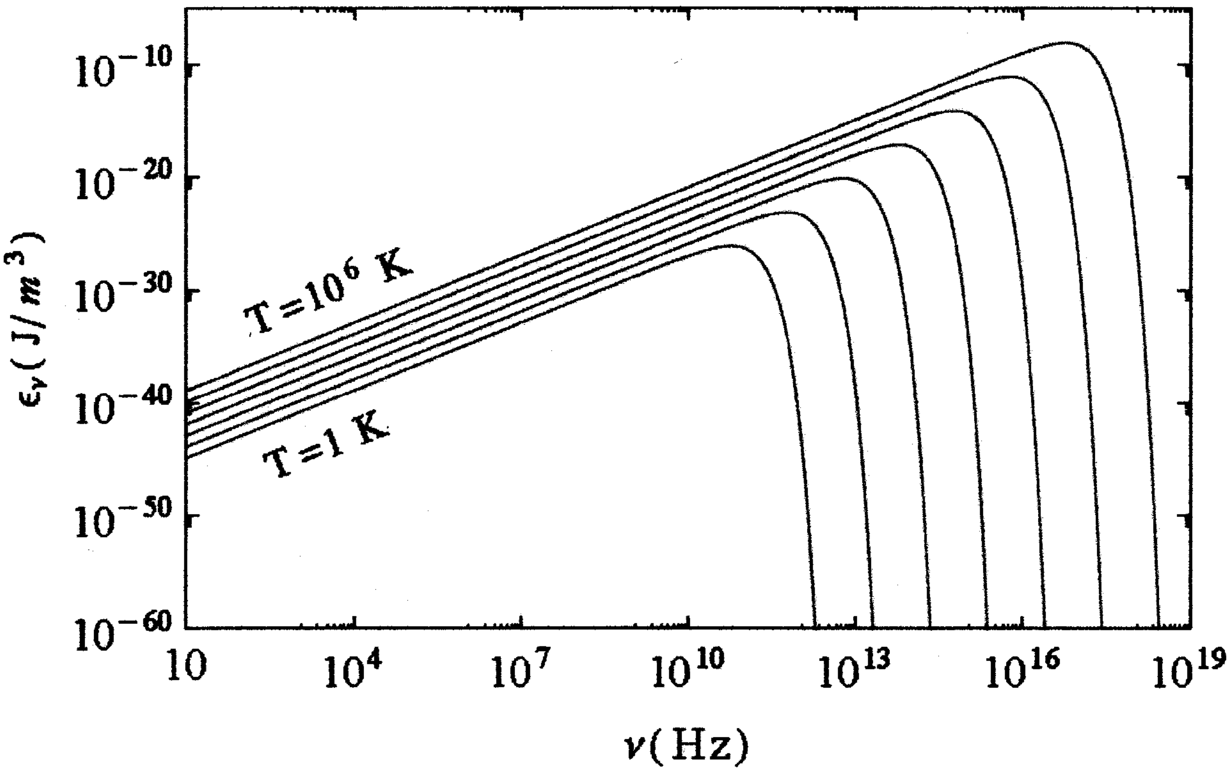
$$\Rightarrow \boxed{Kr \sim z}$$

Comparando com $z = \frac{H_0}{c} r$, $K = \frac{H_0}{c}$, com $H_0 = 70 \frac{km}{s\,Mpc}$

$$\Rightarrow \boxed{K = 2{,}3 \times 10^{-4}\,Mpc^{-1}}$$

PROBLEMA 7

a)



b) $$\varepsilon(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T)-1}\,d\nu$$

Chamando $X \equiv \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} X\ ,\ d\nu = \frac{k_B T}{h} dX$

$$\varepsilon(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{k_B^3 T^3}{h^3}\frac{k_B T}{h}\underbrace{\int_0^\infty \frac{X^3}{\exp X - 1}\,dX}_{\pi^4/15}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(T) = \frac{\pi^2}{c^3}\frac{k_B^4}{h^3}\frac{1}{15}T^4}$$

PROBLEMA 8

$$\frac{h\nu}{K_B T} = X \Rightarrow \varepsilon(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{K_B^3 T^3}{h^3} \frac{X^3}{\exp X - 1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon(\nu,T)}{\partial \nu} = \frac{\partial \varepsilon(X,T)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \nu} = \frac{\partial \varepsilon(X,T)}{\partial X} \frac{h}{K_B T}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu}(\nu,T) = \frac{h}{K_B T} \frac{8\pi K_B^3 T^3}{c^3 h^2} \left[\frac{3X^2}{\exp X - 1} - \frac{X^3 \exp X}{(\exp X - 1)^2} \right]$$

Em $\nu = \nu_{max}$, temos $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} = 0$

$$\Rightarrow \left[\frac{3X_{max}^2}{\exp X_{max} - 1} - \frac{X_{max}^3 \exp X_{max}}{(\exp X_{max} - 1)^2} \right] = 0$$

Resolvendo numericamente, obtemos $X_{max} = 2,82$.

$$\Rightarrow \boxed{\nu_{max} = \frac{K_B X_{max}}{h} T}$$

com $b = \frac{2,82 K_B}{h}$