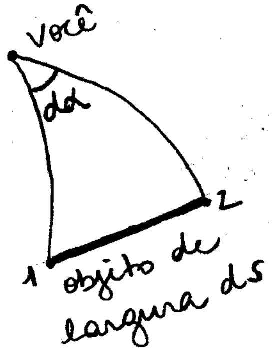
GABARITO DA SEGUNDA LISTA

PROBLEMA 1



Sobre a superfície de uma esfera:

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \, sen^2\left(\frac{r}{R}\right) d\theta^2$$

distância entre pontos (r,θ) e $(r+dr,\ \theta+d\theta)$

r: distância ao polo norte

θ: medido em relação ao meridiano de referência.

Devido à simetria esférica do problema, podemos, sem perda de generalidade, posicionar o observador no polo norte e a extremidade 1 do objeto sobre o meridiano de referência, correspondente a $\theta = 0$.

Como $ds \ll R$, então podemos usar $dr \simeq 0$ e:

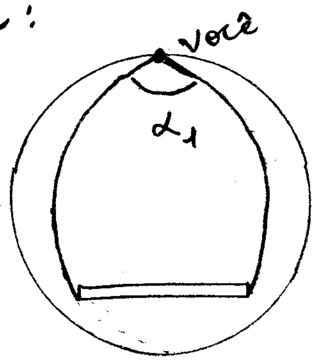
$$ds^2 = R^2 \, sen^2\left(\frac{r}{R}\right) d\alpha^2$$

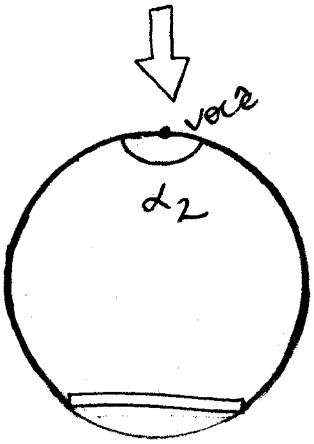
$$\Rightarrow \boxed{d\alpha = \frac{ds}{R \cdot sen(r/R)}}$$

Quando $r \to \pi R$, $sen(r/R) \to sen\,\pi = 0$, e $d\alpha \to \infty$.

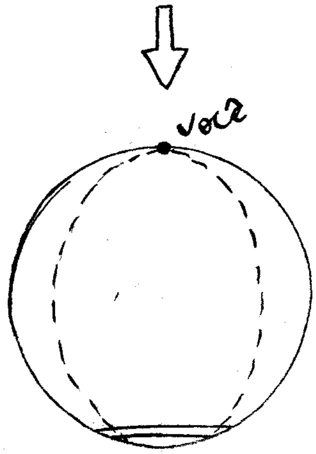
Fisicamente, o limite $r \to \pi R$ corresponde ao caso em que o objeto está no pólo oposto ao observador.

Podemos vizualizar o por quê desse comportamento através das seguintes figuras, que mostram um objeto de tamanho fixo se movendo paralelamente ao equador:

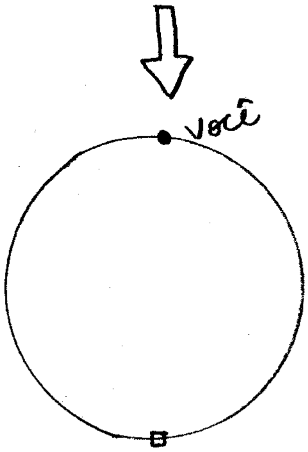




$\alpha_2 = \pi > \alpha_1$

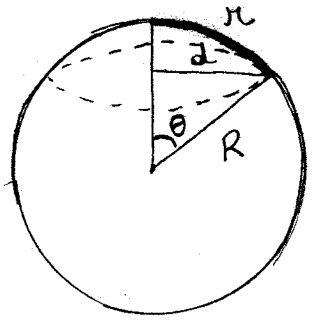


O objeto agora tem uma parte na parte de trás do desenho e o ângulo medido pelo observador será $\alpha_3 > \pi$.



No limite em que o objeto vai ao pólo sul, ele estará completamente "enrolado" em torno de um ponto e o ângulo medido pelo observador tende a ∞.

PROBLEMA 2



R = raio da esfera = 6371 km

r = raio aparente do círculo traçado sobre a esfera

d = raio real do círculo.

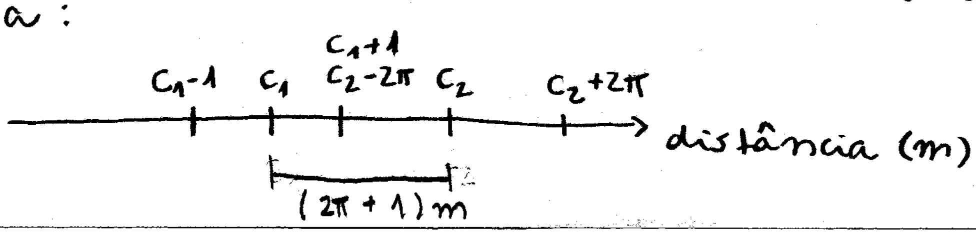
- Circunferência real do círculo : $C_1 = 2\pi d$
- Circunferência inferida por um observador sobre a superfície da esfera : $C_2 = 2\pi r$

a) $C_1 = 2\pi d$

$$\left.\begin{array}{l} d = R \operatorname{sen} \theta \\ R\theta = r \Rightarrow \theta = \dfrac{r}{R} \end{array}\right\} d = R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = 2\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right)}$$

b) Medimos a circunferência real $(C_1 \pm 1)$ m e o raio que inferimos para o círculo $(r \pm 1)$ m. Comparamos então $C_2 = 2\pi r$ inferido $(C_2 \pm 2\pi$ m$)$ com $(C_1 \pm 1)$ m. Para valores pequenos de r, $r \sim d$ e $C_1 \sim C_2$, e a curvatura da superfície esférica não pode ser percebida. Conforme aumentamos r, mesmo que C_1 se torne diferente de C_2, essa diferença pode ainda ser erroneamente atribuída à incerteza nas medidas de distância :



Levando em consideração essa possibilidade, teremos certeza que $C_1 \neq C_2$ quando:

$$C_2 - C_1 > 1 + 2\pi \ (m)$$

$$2\pi r - 2\pi R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right) > 1 + 2\pi$$

Para $r \ll R$, podemos usar $\operatorname{sen}(r/R) \simeq r/R - r^3/3!R^3$

$$\Rightarrow 2\pi r - 2\pi R \frac{r}{R} + 2\pi R \frac{r^3}{3!R^3} > 1 + 2\pi$$

$$\frac{r^3}{3!R^2} > \frac{1 + 2\pi}{2\pi}$$

$$r > \left(\frac{1 + 2\pi}{\pi} \cdot 3R^2\right)^{1/3}$$

Substituindo $R = 6.371 \times 10^3 m$:

$$\boxed{r > 65.599{,}8 \ m \simeq 65{,}6 \ Km}$$

PROBLEMA 3

a) Não é possível desenhar um triângulo de área arbitrariamente grande sobre uma superfície de curvatura positiva.

Nesse caso, os ângulos internos α, β e γ de um triângulo se relacionam com sua área A através de:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2},$$

onde R é o raio de curvatura da superfície esférica.

Para um triângulo equilátero, temos:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$\Rightarrow 3\alpha = \pi + \frac{A}{R^2}$$

Lembrando que os ângulos internos de um triângulo tem que obedecer $0 < \alpha < \pi$, obtemos:

$$3\alpha < 3\pi$$

$$\Rightarrow \pi + \frac{A}{R^2} < 3\pi$$

$$\boxed{A < 2\pi R^2},$$

que corresponde à metade da área da superfície da esfera.

b) Para o caso de uma superfície de curvatura nula é possível desenhar um triângulo de área A arbitrariamente grande.

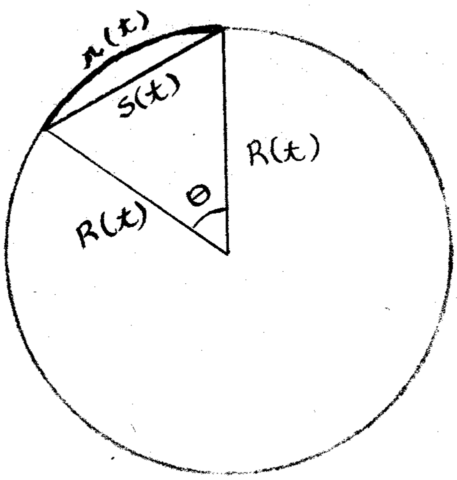
c) <u>Não</u> é possível desenhar um triângulo equilátero com área A arbitrariamente grande sobre uma superfície de curvatura negativa constante.

Nesse caso: $3\alpha = \pi - \frac{A}{R^2}$

Impondo $\alpha > 0$, temos $\pi - \frac{A}{R^2} > 0$

$$\boxed{A < \pi R^2}$$

PROBLEMA 4



a) $r(t) = R(t)\,\theta$

Como θ é constante durante a expansão:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dt}\,\theta \quad (i)$$

Usando $R(t) = a(t) R_0$,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{da}{dt} R_0$$

Substituindo $R_0 = R(t)/a(t)$: $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{da}{dt}\dfrac{R(t)}{a(t)}$

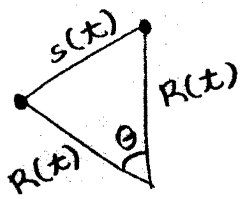
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{R(t)}{a(t)}\theta = \frac{da}{dt}\frac{r(t)}{a(t)}$$

Usando $H(t) \equiv \dfrac{da}{dt}\dfrac{1}{a}$: $\boxed{\dfrac{dr}{dt} = H(t)\, r(t)}$

Voltando para a forma $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{da}{dt} R_0 \theta$, vemos que, mesmo que $\dfrac{da}{dt} R_0 \equiv v < c$, $\dfrac{dr}{dt}$ pode ser $> c$ se:

$$v\theta > c \,, \quad \boxed{\theta > \frac{c}{v}}$$

b)



Usamos a lei dos cossenos para obter:

$$s^2(t) = 2R^2(t) - 2R^2(t)\cos\theta$$

$$\Rightarrow S(t) = R(t)\,[2(1-\cos\theta)]^{1/2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dR}{dt}[2(1-\cos\theta)]^{1/2} = H(t)\underbrace{R(t)[2(1-\cos\theta)]^{1/2}}_{S(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt} = H(t)\, s(t)}$$

Escrevendo na forma $\frac{ds}{dt} = \frac{da}{dt} R_0 \left[2(1-\cos\theta)\right]^{1/2}$,

vemos que, se $\frac{da}{dt} R_0 \equiv v < c$, então, para que $\frac{ds}{dt}$ possa ser $> c$, temos que

$$v\left[2(1-\cos\theta)\right]^{1/2} > c$$

$$1-\cos\theta > \frac{c^2}{2v^2}$$

$$-\cos\theta > \frac{c^2}{2v^2} - 1$$

$$\boxed{\cos\theta < 1 - \frac{c^2}{2v^2}}$$