



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA
INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA — 2012/2
PROF.: MAURÍCIO O. CALVÃO
TERCEIRA LISTA DE PROBLEMAS
DATA DE ENTREGA: 11 de dezembro

PRIMEIRO PRINCÍPIO MORAL DE WHEELER: *Nunca faça um cálculo até que você saiba a resposta.* Faça uma estimativa antes de qualquer cálculo, tente um argumento físico simples (simetria! invariância! conservação!) antes de qualquer dedução; adivinhe (“chute”) a resposta para qualquer enigma (“charada”). Coragem: ninguém mais precisa saber qual é o “chute”. Portanto, faça-o rápido, por instinto. Um “chute” correto reforça este instinto. Um “chute” errado traz o refrigério da surpresa. De qualquer maneira, a vida como um perito do espaço-tempo, não importa a duração, é mais divertida! (*apud* E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics.*)

PROBLEMA 1 (*Constante cosmológica*) [1,0 ponto(s)]

Suponha que a densidade de energia da constante cosmológica seja igual à densidade crítica atual: $\varepsilon_{\Lambda 0} = \varepsilon_{\text{cr},0} = 5200 \text{ MeV} \cdot \text{m}^{-3}$. Qual é a energia total da constante cosmológica dentro de uma esfera de 1 unidade astronômica (UA) de raio? Qual é a energia de repouso do Sol ($E_{\odot} = M_{\odot}c^2$)? Comparando esses dois números, você esperaria que a constante cosmológica tivesse um efeito significativo sobre o movimento dos planetas dentro do sistema solar?

PROBLEMA 2 (*Universo de Einstein*) [1,0 ponto(s)]

Considere o universo estático de Einstein, no qual a força atrativa da densidade de matéria ρ é exatamente contrabalançada pela força repulsiva da constante cosmológica $\Lambda = 4\pi G\rho$. Suponha que alguma parte da matéria seja convertida em radiação (pelas estrelas, por exemplo). O universo começará a expandir ou contrair? Explique sua resposta.

PROBLEMA 3 (*Equação de estado*) [1,0 ponto(s)]

O princípio de dualidade onda-partícula nos diz que uma partícula com momento p tem um comprimento de onda de de Broglie associado $\lambda = h/p$; esse comprimento de onda cresce como $\lambda \propto a$, conforme o universo se expande. A densidade de energia total de um gás de partículas pode ser escrita como $\varepsilon = nE$, onde n é a densidade numérica de partículas, e E é a energia por partícula. Por simplicidade, suponhamos que todas as partículas do gás têm a mesma massa (de repouso) m e momento p . A energia por partícula é, então, simplesmente

$$E = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2} = (m^2c^4 + h^2c^2/\lambda^2)^{1/2} .$$

Compute a razão piezoenergética w para esse gás como uma função do fator de escala a . Mostre que $w = 1/3$ no regime altamente relativístico ($a \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$) e que $w = 0$ no regime altamente não relativístico ($a \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$).

PROBLEMA 4 (*Evolução do parâmetro de densidade*) [2,0 ponto(s)]

Deduz a expressão para a derivada temporal $\dot{\Omega}$ do parâmetro de densidade, em função de tal parâmetro, Ω e do parâmetro de Hubble H . Idem para \dot{H} , em função de Ω e H .

PROBLEMA 5 (*Relação entre os parâmetros de desaceleração e de densidade e a razão piezoenergética*) [2,0 ponto(s)]

Deduz a relação geral entre os parâmetros de desaceleração q , de densidade Ω e a razão piezoenergética w .

PROBLEMA 6 (*Expansões em série de Taylor*) [3,0 ponto(s)]

(a) Expanda o fator de escala $a(t)$, em torno do seu valor atual $a(t_0) =: a_0 = 1$, correta até quarta ordem em $t_0 - t$. Identifique como as quatro derivadas $\dot{a}(t = t_0), \dots, a^{(4)}(t = t_0)$ se relacionam com os valores atuais dos parâmetros de Hubble H e de desaceleração q usuais, assim como com os valores atuais de dois novos parâmetros da literatura cosmológica (consulte a internet) chamados “snap” e “jerk” e expresse a expansão acima referida em termos de tais parâmetros.

(b) Obtenha agora uma correspondente expressão, correta até a quarta ordem em $t_0 - t$ também, para a série de Taylor do desvio para o vermelho z , em torno do seu valor de base $z_0 = 0$.

(c) Inverta a série do item anterior, de modo a obter uma expressão, correta agora até a quarta ordem em z , para o intervalo $t_0 - t$.