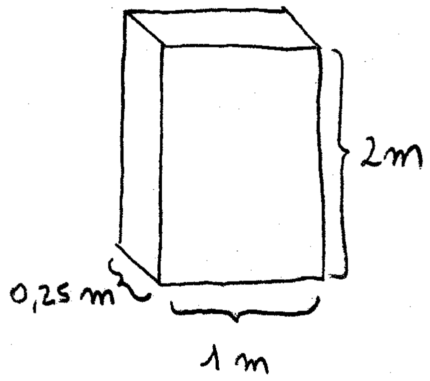
GABARITO DA QUARTA LISTA

PROBLEMA 1

Para cada espécie: $n_\nu = 1{,}12 \times 10^8\ m^{-3}$

Para as três espécies: $3n_\nu = 3{,}36 \times 10^8\ m^{-3}$

Admitindo que o corpo humano tem as dimensões indicadas na figura, o volume médio corporal é:



$$V = 0{,}25\ m^3$$

$\Rightarrow$ O número de neutrinos dentro desse volume é:

$$\boxed{N = 3n_\nu \times V = 8{,}4 \times 10^7}$$

Se os neutrinos são não relativísticos, a energia de 1 neutrino é dada por:

$$E_\nu = m_\nu c^2$$

A densidade de energia de cada espécie é:

$$\varepsilon_\nu = m_\nu c^2 n_\nu$$

E a densidade total de todas as espécies é:

$$\varepsilon_{\nu T} = n_\nu c^2 (m_{\nu e} + m_{\nu\mu} + m_{\nu\tau})$$

A densidade crítica hoje é: $\begin{cases} \varepsilon_{c,0} = 5200\ MeV/m^3 \\ \rho_{c,0} = \dfrac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} = 9{,}2 \times 10^{-27}\ \dfrac{Kg}{m^3} \end{cases}$

$\Rightarrow \varepsilon_{\nu T} = \varepsilon_{c,0}$: $n_\nu (m_{\nu e} + m_{\nu\mu} + m_{\nu\tau}) = \rho_{c,0}$

$$\boxed{m_{\nu e} + m_{\nu\mu} + m_{\nu\tau} = 8{,}2 \times 10^{-35}\ Kg}$$

PROBLEMA 2

Para um Universo espacialmente chato, com uma única componente, temos:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3(1+w)}$$

$$\Rightarrow \quad 1+z = \frac{1}{a} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3(1+w)}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{1}{t^{2/3(1+w)}} \frac{2}{3(1+w)} \frac{t_0^{2/3(1+w)}}{t_0} \cancelto{1}{\frac{dt_0}{dt_0}} +$$

$$- t_0^{2/3(1+w)} \frac{2}{3(1+w)} \frac{-1}{t^{2/3(1+w)}t} \cancelto{(1+z)^{-1}}{\frac{dt}{dt_0}}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = (1+z) \underbrace{\frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t_0}}_{H_0} - (1+z) \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t} (1+z)^{-1}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = (1+z) H_0 - \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t}$$

Para escrever o resultado no formato pedido, substituimos $t = (1+z)^{-3(1+w)/2}\, t_0$ na expressão acima e obtemos:

$$\frac{dz}{dt_0} = (1+z) H_0 - \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1} (1+z)^{3(1+w)/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt_0} = (1+z) H_0 - H_0 (1+z)^{3(1+w)/2}}$$

Para que o desvio para o vermelho decresça com o tempo,

$$\frac{dz}{dt_0} < 0 \quad e \quad H_0(1+z)^{3(1+w)/2} > H_0(1+z)$$

$$\Rightarrow \frac{3(1+w)}{2} > 1$$

$$\boxed{w > -1/3}$$

Para que ele cresça com o tempo:

$$\frac{dz}{dt_0} > 0 \quad e \quad H_0(1+z)^{3(1+w)/2} < H_0(1+z)$$

$$\boxed{w < -1/3}$$

No nosso Universo, que acreditamos estar em expansão acelerada, o desvio para o vermelho cresce com o tempo.

PROBLEMA 3

Para um Universo espacialmente chato, com somente 1 componente, a distância própria de um objeto hoje é dada por:

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-(1+3w)/2}\right].$$

Em um Universo que contém somente radiação, $w = 1/3$:

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\left[1-(1+z)^{-1}\right] = \frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z}.$$

A distância própria de uma galáxia que possui $z=7$, com $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, será:

$$\boxed{d_p(t_0) = 3750 \text{ Mpc}}$$

(radiação)

Em um Universo que contém somente matéria, $w = 0$:

$$d_p(t_0) = \frac{2c}{H_0}\left[1 - (1+z)^{-1/2}\right] = \frac{2c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]$$

Para $z = 7$: $\boxed{d_p(t_0) = 5541 \text{ Mpc}}$

(matéria)

No caso de um Universo dominado por radiação, a distância própria calculada no momento em que a luz foi emitida é dada por:

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0(1+z)}\left[1 - \frac{1}{1+z}\right] = \frac{c}{H_0}\frac{z}{(1+z)^2} = \frac{d_p(t_0)}{1+z}$$

Substituindo $z = 7$, obtemos:

$$\boxed{d_p(t_e) = 468{,}8 \text{ Mpc}}$$

(radiação)

No caso de um Universo dominado por matéria, temos:

$$d_p(t_e) = \frac{2c}{H_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]\frac{1}{(1+z)} = \frac{d_p(t_0)}{1+z}$$

Para $z = 7$,

$$\boxed{d_p(t_e) = 692{,}6 \text{ Mpc}}$$

(matéria)