UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA
INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA — 2012/2
PROF.: MAURÍCIO O. CALVÃO
QUINTA LISTA DE PROBLEMAS
DATA DE ENTREGA: 05 de fevereiro

PRIMEIRO PRINCÍPIO MORAL DE WHEELER: *Nunca faça um cálculo até que você saiba a resposta.* Faça uma estimativa antes de qualquer cálculo, tente um argumento físico simples (simetria! invariância! conservação!) antes de qualquer dedução; adivinhe ("chute") a resposta para qualquer enigma ("charada"). Coragem: ninguém mais precisa saber qual é o "chute". Portanto, faça-o rápido, por instinto. Um "chute" correto reforça este instinto. Um "chute" errado traz o refrigério da surpresa. De qualquer maneira, a vida como um perito do espaço-tempo, não importa a duração, é mais divertida! (*apud* E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*.)

PROBLEMA 1 (*Idade de universo com tri-curvatura negativa*) [2,0 ponto(s)]

Mostre que a idade atual de um universo com tri-curvatura negativa, que contém somente matéria não relativística ($\Omega_0 < 1, k = -1$), é dada por:

$$H_0 t_0 = \frac{1}{1-\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}} \operatorname{Arccosh}\left(\frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}\right).$$

PROBLEMA 2 (*Quintessência*) [2,0 ponto(s)]

Em modelos de quintessência, o universo contém um campo quântico que apresenta densidade de energia positiva e razão piezoenergética negativa. Vamos trabalhar com um modelo de universo com tri-curvatura nula e que contém matéria não relativística e campo de quintessência com $w = -1/2$. Obtenha a expressão para o fator de escala a_{mQ} para o qual as densidades de energia da matéria não relativística e do campo de quintessência têm o mesmo valor. Resolva a equação de Friedmann para obter o fator de escala $a(t)$ em tal Universo. Encontre as expressões para $a(t)$ nos limites $a \ll a_{mQ}$ e $a \gg a_{mQ}$. Calcule a atual distância do horizonte de partículas nesse modelo.

PROBLEMA 3 (*Idade do universo*) [2,0 ponto(s)]

Escreva um programa que calcule a idade atual (em unidades de H_0) de um universo de Friedmann que pode conter matéria não relativística, radiação e constante cosmológica, e ter tri-curvatura qualquer. Verifique o funcionamento do seu programa calculando $t_0 H_0$ para os seguintes casos particulares com tri-curvatura nula:

1. Somente matéria não relativística;
2. Somente radiação.

Calcule então o valor de $t_0 H_0$ para o modelo padrão ($\Omega_{m,0} = 0.3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$, $\Omega_{r,0} \approx 0$ e $k = 0$). Sua resposta deve conter, além dos valores de $H_0 t_0$ pedidos, uma folha com o seu código impresso.

PROBLEMA 4 (*Distância comóvel*) [4,0 ponto(s)]

A distância comóvel ao longo da linha de visada entre um observador e um objeto com desvio para o vermelho z é dada por:

$$D_C(z) = \int_{r'=0}^{r} dr'.$$

Mostre que

$$dr = D_{H,0} \frac{dz}{E(z)},$$

onde $D_{H,0} := c/H_0$ é a distância de Hubble hoje e

$$E(z) := \frac{H}{H_0} = \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2}\,,$$

com $\Omega_0 := \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$.

Escreva um programa que calcule $D_C(z)$ para os seguintes universos:

1. Einstein-de Sitter ($\Omega_{m,0} = 1$);
2. Um universo com baixa densidade de matéria ($\Omega_{m,0} = 0.05$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $\Omega_{r,0} = 0$);
3. Modelo padrão ($\Omega_{m,0} = 0.3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$, $\Omega_{r,0} \approx 0$ e $k = 0$),

e faça um gráfico que mostre $D_C(z)$ como função de z para os três modelos acima (as três curvas devem ser apresentadas no mesmo gráfico), no intervalo $0 < z < 5$.

Inclua, junto com a sua resposta, uma folha com o seu código impresso.