# GABARITO SEXTA LISTA

## PROBLEMA 1

Chamemos $t_0 - t_e = T$

$$\Rightarrow z \approx H_0 T + \left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^2 T^2 \qquad (i)$$

$$T \approx C_1 + C_2 z + C_3 z^2 \qquad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii) obtemos:

$$T \approx C_1 + C_2 H_0 T + C_2\left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^2 T^2 + C_3 H_0^2 T^2 + $$

$$+ \underbrace{C_3 H_0^3 \cancel{(2+q_0)} T^3}_{O(T^3)} + \underbrace{C_3 \cancel{\left(\frac{2+q_0}{2}\right)^2} H_0^4 T^4}_{O(T^4)}$$

Comparando os termos da direita com $T$, temos:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 H_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = H_0^{-1} \\ C_2\left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^2 + C_3 H_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\left(\frac{2+q_0}{2}\right) H_0^{-1} \end{cases}$$

Substituindo em (ii):

$$T \approx 0 + \frac{z}{H_0} - \left(\frac{2+q_0}{2}\right)\frac{z^2}{H_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{(t_0 - t_e) \approx \frac{1}{H_0}\left[z - \left(\frac{2+q_0}{2}\right) z^2\right]}$$

PROBLEMA 2

$L = 10\,W$ → luminosidade da pata do urso

$$M \equiv -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{L}{L_x}\right) \quad , \text{ com } L_x = 78{,}7\, L_\odot$$

$$(L_\odot = 3{,}8 \times 10^{26}\, W)$$

$$\Rightarrow M = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{10}{78{,}7 \times 3{,}8 \times 10^{26}}\right)$$

$\boxed{M = 68{,}7}$ Magnitude absoluta bolométrica da pata do urso.

$$m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d_L}{10\,pc}\right)$$

$$1\,pc = 3{,}08 \times 10^{16}\, m$$

$$\Rightarrow 0{,}5\, Km = 0{,}5 \times 10^{3}\, m = 1{,}6 \times 10^{-14}\, pc$$

Então, a magnitude aparente da pata do urso ($M = 68{,}7$) a uma distância de luminosidade $d_L = 1{,}6 \times 10^{-14}\, pc$, é dada por:

$$m = 68{,}7 + 5 \log_{10}\left(\frac{1{,}6 \times 10^{-14}}{10}\right)$$

$\boxed{m = -5{,}27}$ Magnitude aparente bolométrica da pata do urso a $d_L = 0{,}5\, Km$.

Se o bolômetro só consegue detectar a pata do urso se ela estivér a uma distância de luminosidade menor que 0,5 Km, então ele só será capaz de detectar objetos com magnitude aparente menor que -5,27.

A magnitude absoluta bolométrica do Sol é:

$$M_\odot = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{L_\odot}{L_x}\right) = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{1}{78{,}7}\right) = 4{,}74$$

Substituindo $m = -5,27$ e $M_\odot = 4,74$ em

$$m - M_\odot = 5 \log \left( \frac{d_L}{10pc} \right),$$

podemos obter a distância de luminosidade máxima para a qual o bolômetro conseguiria detectar o Sol.

$$10^{(-5,27-4,74)} = \left( \frac{d_L}{10pc} \right)^5$$

$$\Rightarrow \boxed{d_L = 0,0995 \text{ pc}}$$

Aplicando o mesmo procedimento para uma supernova com $L = 4 \times 10^9 L_\odot$:

$$M_S = -2,5 \log_{10} \left( \frac{4 \times 10^9 \cancel{L_\odot}}{77,7 \cancel{L_\odot}} \right) = -19,26$$

$$\Rightarrow 10^{(-5,27+19,26)} = \left( \frac{d_L}{10pc} \right)^5$$

$$\boxed{d_L = 6280 \text{ pc}}$$

PROBLEMA 3

$$D_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}$$

Se $D_A = 0,5$ Km $= 0,5 \times 10^3$ m e $l = 0,16$ m, então:

$$\delta\theta = \frac{0,16}{0,5 \times 10^3} = 0,00032 \text{ rad} \;//$$

No modelo padrão, a distância de diâmetro angular possui um máximo em um desvio para o vermelho crítico $z_c = 1{,}6$, correspondente a $d_A = 1800$ Mpc.

Portanto, o tamanho angular mínimo que a pata do urso pode ter é dado por:

$$\delta\theta_{min} = \frac{0{,}16\ m}{1800\ Mpc} = \frac{0{,}16\ m}{5{,}5 \times 10^{25}\ m}$$

$$\boxed{\delta\theta_{min} = 2{,}9 \times 10^{-27}\ rad}$$

## PROBLEMA 4

Para $z \ll 1$, temos:

$$d_L(z) \approx \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right).$$

Substituindo em

$$m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d_L}{1 Mpc}\right) + 25,$$

obtemos:

$$m - M = 5 \log_{10}\underbrace{\left(\frac{cz}{H_0}\frac{1}{1 Mpc}\right)}_{\text{adimensional}} + 5 \log_{10}\underbrace{\left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)}_{\text{adimensional}} + 25$$

$$= 5 \log_{10}\left(3 \times 10^5 \frac{\cancel{Km}}{\cancel{s}} \frac{1}{H_0} \frac{70\ Km}{s Mpc} \frac{\cancel{s}\cancel{Mpc}}{70\ \cancel{Km}} \frac{1}{\cancel{Mpc}}\right) +$$

$$+ 5 \log_{10} z + 5 \log_{10}\left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right) + 25$$

$$= \underbrace{\left[5 \log_{10}\left(\frac{3 \times 10^5}{70}\right) + 25\right]}_{43{,}17} - 5 \log_{10}\left(\frac{H_0}{70\ Km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}\right) +$$

$$+ 5 \log_{10} z + 5 \log_{10}\left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)$$

Podemos expandir $f(z) = \log_{10}\left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)$:

$$f(z) = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=0}} z + \ldots$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\log_{10}(x)}{dx} \frac{dx}{dz} \qquad \left(\text{com } x \equiv 1 + \frac{1-q_0 z}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1-q_0 z}{2}\right)} \frac{1}{\ln 10} \frac{(1-q_0)}{2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=0} = \frac{1}{\ln 10} \frac{(1-q_0)}{2}$$

$$m - M = 43{,}17 - 5\log_{10}\left(\frac{H_0}{70\,\text{Km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}}\right) + 5\log_{10} z + \frac{5}{2}\frac{(1-q_0)}{\ln 10} z$$

$$\boxed{m - M = 43{,}17 - 5\log_{10}\left(\frac{H_0}{70\,\text{Km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}}\right) + 5\log_{10} z + 1{,}086(1-q_0) z}$$