



Instituto de Física UFRJ
Mestrado em Ensino profissional

Tópicos de Física Clássica II 3ª Lista de Exercícios

Segundo Semestre de 2008 Prof. A C Tort

Problema 1 *Transformação de Lorentz I.* Em aula vimos que analisando um relógio de luz levando em conta os postulados da relatividade einsteiniana, obtemos dois resultados importantes, a saber: (i) a dilatação temporal, e a (ii) contração do comprimento na direção do movimento. Com estes dois resultados obtemos as transformações de Lorentz. Eis um modo mais formal de obter os mesmos resultados. Considere dois referenciais inerciais K e K' em movimento relativo, veja a figura na página 2. Suponha que velocidade de K' em relação a K seja $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, constante, e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos. Queremos obter as transformações que permitem passar de um referencial para o outro, respeitando os postulados da relatividade restrita (RR), a saber: **(1) a velocidade da luz não depende do estado de movimento da fonte;** **(2) as leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais.**

(a) Suponha que a relação entre as coordenadas dos dois sistemas seja linear, i.e.:

$$x = ax' + bt'$$

$$t = ex' + ft'$$

Usando os postulados da RR determine os coeficientes a , b , d e f . **Sugestão:** considere separadamente pulsos de luz emitidos no instante em que os dois sistemas coincidem. Um pulso no sentido positivo dos eixos x e x' , um pulso no sentido negativo e, finalmente, um pulso esférico. Você deve obter

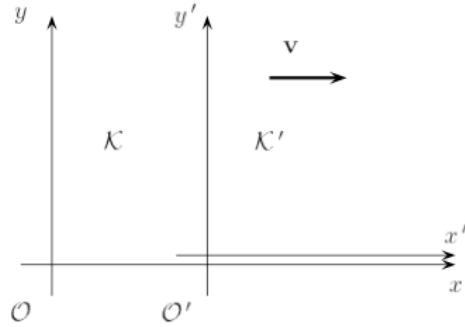
$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

onde $\gamma := (1 - \beta^2)^{-1/2}$ com $\beta := v/c$.

(b) Obtenha a transformação de Lorentz inversa.

(c) Mostre que no limite $\beta := v/c \ll 1$, obtemos as transformações de Galileu.



Problema 2 *Transformação de Lorentz II.* Considere dois referenciais inerciais K e K' em movimento relativo, veja a figura acima. Suponha que velocidade de K' em relação a K seja $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, constante, e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos.

(a) Mostre que se definirmos

$$\beta := \tanh \theta$$

onde $\beta := v/c$, as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas de uma partícula no referencial K' com as coordenadas dessa mesma partícula em relação ao referencial K podem ser escritas na forma

$$x = \cosh \theta x' + \sinh \theta ct'$$

$$ct = \sinh \theta x' + \cosh \theta ct'$$

(b) Escreva as transformações inversas.

(c) Mostre que o quadrado do intervalo entre dois eventos (um evento é um ponto no espaço-tempo de coordenadas (ct, x)) é invariante frente a TL acima, i.e.:

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$$

(d) Qual é o análogo euclidiano da ‘rotação’ obtida no item anterior?

(e) Qual é o análogo euclidiano do invariante obtido no item (c)?

Problema 3 *Transformações de Lorentz para a velocidade.* Obtenha as transformações de Lorentz para as três componentes da velocidade ordinária u_x , u_y e u_z . Suponha que o referencial K' tenha velocidade constante $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ em relação ao referencial K , e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos. Você deve obter

$$u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

Obtenha o limite $\beta \ll 1$ das equações acima.

Problema 4 No referencial do laboratório, um elétron tem velocidade $c/2$ na direção x e um fóton tem velocidade c na direção y .

- Calcule o **vetor velocidade** do fóton em relação ao elétron.
- Calcule o **módulo** do vetor velocidade do fóton em relação ao elétron.

Problema 5 *Adição de velocidades* Como aplicação do resultado anterior considere novamente os dois referenciais inerciais K e K' em movimento relativo com velocidade $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. Mostre que se no referencial K' a velocidade da luz pode ser decomposta nas componentes $u'_x = c \cos \phi'$ e $u'_y = c \sin \phi'$, então no referencial K

$$u_x^2 + u_y^2 = c^2$$

Problema 6 *Transformações de Lorentz para a aceleração*. Obtenha as transformações de Lorentz para as três componentes da aceleração ordinária a_x , a_y e a_z . Suponha que o referencial K' tenha velocidade constante $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ em relação ao referencial K e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos.

Problema 7 *Contração de Lorentz* Considere dois referenciais inerciais K e K' em movimento relativo. No referencial K' , o observador define o comprimento L_0 de uma barra em repouso medindo ao mesmo tempo as abscissas das extremidades A e B da barra, i.e.:

$$L_0 := x'_B - x'_A, \quad t'_A = t'_B$$

No referencial K , em relação ao qual a barra move-se com velocidade constante $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, o observador define o comprimento da barra como o intervalo de tempo entre a passagem da extremidade A e a passagem da extremidade B multiplicado pela velocidade escalar da barra, i.e.:

$$L := v \Delta t = v(t_A - t_B)$$

Use as transformações de Lorentz e mostre que

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0$$

Isto significa que o comprimento da barra em movimento é menor do que o comprimento da barra em repouso. **Questão para discussão:** a contração do comprimento na direção do movimento é real, física, ou aparente?

Problema 8

- (a) Mostre se L_0^3 é o volume de um cubo em repouso, então

$$L_0^3 \sqrt{1 - \beta^2}$$

é o volume do cubo medido em referencial que se move com velocidade constante βc paralelamente a uma aresta.

- (b) Suponha que o cubo em repouso seja uniformemente preenchido por uma distribuição de carga ρ . Determine a densidade de carga em relação ao referencial que se move com velocidade constante βc paralelamente a uma aresta. **Resposta:** $\rho' = \gamma \rho$

Problema 9 Considere dois referenciais inerciais K e K' em movimento relativo, veja a figura na página 2. Suponha que velocidade de K' em relação a K seja $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, constante, e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos. No referencial K ocorrem duas explosões no mesmo ponto do espaço, mas com um intervalo de tempo de 3 segundos entre elas.

- (a) Determine a separação espacial entre os dois eventos no referencial K' se nesse referencial a separação temporal é de 5 segundos. **Resposta:** 12×10^8 metros.
- (b) Determine a velocidade relativa entre os dois referenciais. **Resposta:** $\beta = 4/5$.

Problema 10 *Simultaneidade.* Zé Pedro, Zé Paulo e Zé Zão praticam o perigoso *surf* ferroviário viajando no teto de um trem que se move com velocidade βc com $\beta \sim 1$. Zé Pedro vai no vagão da frente, Zé Paulo na extremidade do último vagão e Zé Zão no meio do trem, equidistante dos dois companheiros. Um guarda ferroviário observa tudo parado ao lado dos trilhos. No instante em que Zé Zão passa pelo guarda, dois flashes de luz disparados por Zé Pedro e Zé Paulo chegam a simultaneamente a Zé Zão e ao guarda. Na delegacia, onde todos vão parar, há uma controvérsia. Quem disparou o flash em primeiro lugar? Zé Pedro ou Zé Paulo? Mostre com argumentos qualitativos que a resposta de Zé Zão e a resposta do guarda não são iguais e calcule a diferença entre os tempos de emissão dos dois flashes de luz.

Problema 11 Uma barra de um metro de comprimento encontra-se em repouso no referencial K' e forma um ângulo de medida ϕ' com o eixo $O'x'$. Determine o ângulo ϕ que a barra forma com o eixo Ox do referencial K . Os dois referenciais inerciais K e K' estão em movimento relativo como mostra a figura na página 2. **Resposta:** $\tan \phi = \gamma \tan \phi'$.

Problema 12 *Campo elétrico de uma carga em movimento* Considere uma carga puntiforme em repouso na origem do referencial K' . Desenhe as linhas de força do campo elétrico gerado por essa carga. Suponha agora que esta carga seja observada movendo-se com velocidade constante $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Refaça o desenho das linhas de campo. **Sugestão:** considere o resultado do problema anterior.

Problema 13 *O paradoxo dos gêmeos I.* Uma jovem astronauta parte em uma nave espacial rumo a uma galáxia que dista 4 anos-luz da Terra. A velocidade da nave, que por simplicidade vamos supor constante, vale $0,9c$ tanto na ida como na volta. O irmão gêmeo da astronauta permanece na Terra. Mostre que na volta, quando os dois irmãos reúnem-se um deles é cinco anos mais jovem que o outro.

Problema 14 *O paradoxo dos gêmeos II: versão dura.* Uma nave espacial parte da Terra no ano 2100 com destino a um sistema estelar distante. Um dos membros de um casal de gêmeos nascidos em 2080 permanece na Terra, o outro parte com a nave. A nave tem aceleração g em relação a um sistema de referência em relação ao qual a nave está instantaneamente em repouso (o referencial co-movente). O foguete acelera em linha reta durante cinco anos medidos no relógio de bordo, desacelera com a mesma taxa de desaceleração (em módulo) por mais 5 anos, dá a volta, acelera com aceleração g por 5 anos, desacelera com g por 5 anos e chega de volta à Terra. O gêmeo que partiu agora tem 40 anos.

- (a) Em que ano estamos na Terra?
- (b) A que distância da Terra o foguete foi?

Problema 15 Considere um feixe de mésons π^+ com velocidade $0,73c$. No referencial de repouso, a vida média de um méson π^+ é $2,5 \times 10^{-8}$ segundos.

- (a) Determine a vida média de um méson π^+ com velocidade $0,73c$. **Resposta:** $3,6 \times 10^{-8}$ segundos.
- (b) Qual a distância percorrida pelo méson π^+ em uma vida média? **Resposta:** 8 metros.
- (c) Qual a distância percorrida pelo méson π^+ em uma vida média sem os efeitos relativísticos? **Resposta:** 5 metros.

Problema 16 *Efeito Doppler.* Considere uma fonte de radiação eletromagnética que se afasta do observador.

- (a) Mostre que se $\beta = V_{\text{fonte}}/c \ll 1$, então em primeira ordem em β o parâmetro z que mede o efeito Doppler relativístico pode ser escrito na forma

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \beta.$$

- (b) Acredita-se que uma nuvem de gás gire em torno de um candidato a buraco negro com uma massa equivalente a 2×10^9 de massas solares localizado no centro da nossa galáxia. A distância da nuvem de gás ao centro galáctico é de 60 anos-luz. Calcule de forma aproximada o parâmetro z associado com o movimento da nuvem de gás. **Sugestão: use a lei da gravitação universal.**

