

Introdução às forças dispersivas e ao efeito Casimir

C. Farina

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física

Instituto de Física - UFRJ

11 de fevereiro de 2014

Roteiro da Apresentação

1. **Introdução: efeitos do vácuo quântico**
2. **Breve história da energia de ponto-zero**
3. **Forças de van der Waals dispersivas**
4. **Efeito Casimir: sua história e o método de Casimir**
5. **Comentários finais**

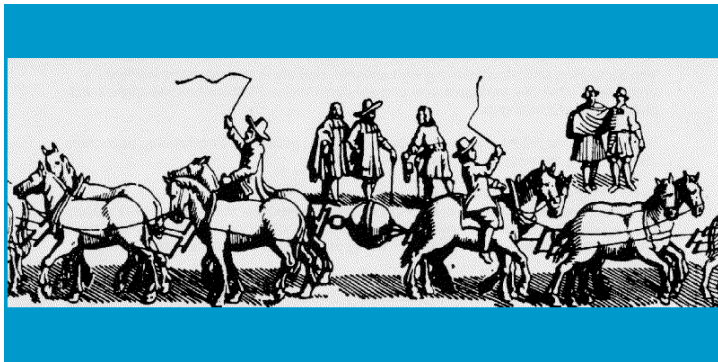
Introdução: efeitos do vácuo quântico

- O vácuo já atormentava filósofos da Grécia antiga;



- **De Aristóteles (384-322 b.C.) até \approx séc. XVII:**
“Natura adhorret vacuum”
- **Problema na construção das fontes de Florença:**
“A natureza provavelmente não abomina o vácuo acima de 10 metros” (Galileu);

- O barômetro de mercúrio de **Torricelli (1644)**, os exagerados barômetros de **vinho** de **Pascal** e o espetacular experimento dos hemisférios de “Magdeburg” feito por **Otto von Guericke (1657)** sugeriam a **existência do vácuo** na natureza;



- **Ondas eletromagnéticas** \implies retorno do **éter luminífero**;
 \implies **inexistência do vácuo**;
- **Éter luminífero**; \implies **referencial privilegiado.**

Éter banido: o retorno do vácuo

Teoricamente

- **Einstein** propõe a relatividade restrita (1905), com referenciais inerciais equivalentes.
- Não há referencial privilegiado \implies **não há éter luminífero**.
- As ondas eletromagnéticas propagam no vácuo com a mesma velocidade **c** relativa a qualquer referencial inercial.

Experimentalmente

- **Michelson-Morley** (1887) mostra que não há vento etéreo na Terra; observações extraterrestres confirmam...

Vácuo clássico: espaço vazio, inerte e insensível a qualquer estímulo externo.

VÁCUO QUÂNTICO

- Está longe de ser simplesmente um espaço vazio, inerte, ...
- **Comporta-se como um meio material**, que responde a estímulos externos (**se polariza, se magnetiza, ...**).
- **Possui uma energia infinita, a energia de ponto-zero**, mas que é inacessível diretamente.
- No entanto, **as variações da EPZ** (causadas pela presença dos corpos, ou pela compactificação de dimensões espaciais, ...), **são finitas** e dão origem a fenômenos físicos.
- **Princípio de Heisenberg**, **energia de ponto zero** e flutuações quânticas no Oscilador Harmônico (OH).

1. Oscilador hamônico clássico

Massa m e força $F = -kx \Rightarrow$ frequência $\omega = \sqrt{k/m}$

Energia potencial $U(x) = (1/2)kx^2$:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

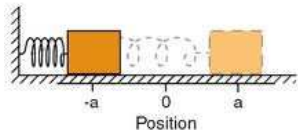
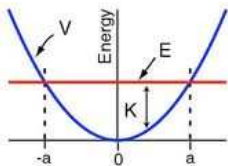
Energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Pode ter **qualquer valor positivo**:

$$E = (1/2) k a^2 \geq 0$$

Estado fundamental: $E = 0$.



- Usando frequência ω e momento linear $p = m v$,

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 .$$

- Massa unitária

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 .$$

- Muitos sistemas se comportam como um OH, pelo menos aproximadamente:

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 .$$

onde os significados de p e q dependem do sistema.

Exemplo: pêndulo simples com pequenas oscilações.

- Outros se comportam como um conjunto de vários OHs,

$$E = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} p_n^2 + \frac{1}{2} \omega_n^2 x_n^2 \right) ,$$

como N contos em um fio tenso.

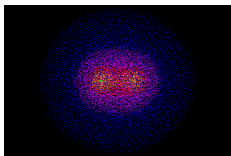
- **O campo eletromagnético** se comporta como um conjunto infinito de OHs,

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left(\frac{1}{2} p_{\mathbf{k}, \alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}, \alpha}^2 \right) \quad (\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|) ,$$

onde \mathbf{k} é vetor de propagação da onda, com infinitos valores possíveis, e $\alpha = 1, 2$ são as polarizações da onda.

2. Oscilador harmônico quântico

Exemplo: molécula de H_2 com pequenas oscilações.



- **Energias possíveis:**

$$E = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

- **Constante de Planck**

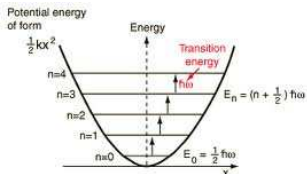
$$\hbar = 1,054571726(47) \times 10^{-34} \text{ Js.}$$

- Absorção e emissão em **múltiplos de $\hbar\omega$** . (No OH clássico $n \gg 1$.)

- **Estado do fundamental** ($n = 0$):

Energia de ponto zero

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$$



3. Sistemas quânticos e princípio de Heisenberg

$N (\gg 1)$ medidas A_1, \dots, A_N de uma grandeza $A \Rightarrow$ **média** e **incerteza**:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n \quad \text{e} \quad \Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$



- Para grandezas A e B de um sistema quântico há um número $|\langle [A, B] \rangle| \geq 0$.
- Princípio da Incerteza de **Heisenberg**:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

- \Rightarrow Flutuações Quânticas.
- Exemplo: $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$
- \Rightarrow impossibilidade de trajetória.

Princípio de Heisenberg \implies há energia de ponto-zero

- Valores médios nulos no fundamental: $\langle x \rangle = 0$ e $\langle p \rangle = 0$

$$\implies \langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2 \quad \text{e} \quad \langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2.$$

- Energia em termos de Δp e Δx

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2.$$

- Princípio de Heisenberg com incerteza mínima: $\Delta x \Delta p = \hbar/2$

$$\implies \langle E \rangle = \frac{(\hbar/2)^2}{2m} \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2.$$

- **Mínimo da energia:** $d\langle E \rangle/d(\Delta x) = 0 \implies (\Delta x)^2 = \hbar/(2m\omega)$

$$\implies \langle E \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

ALGUNS EFEITOS

DE

FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO VÁCUO

- **TQC:** Mec. Quânt. + Relatividade
 $(\Delta E \Delta t \geq \hbar/2)$ + $(E = mc^2)$

vácuo quântico: contínua criação e aniquilação de partículas e antipartículas virtuais (tempos de vida $\implies \tau \sim \frac{\hbar}{2\Delta E}$);

Por exemplo: pares e^+e^- , em suas efêmeras existências **são afetados**, em princípio, **por qualquer agente externo** (campos elétricos ou magnéticos, fronteiras, dim. compactificadas, ..);

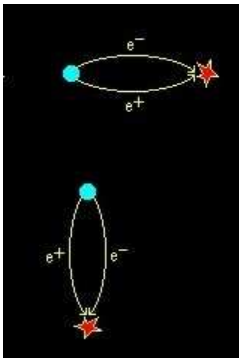
Criação de pares por campo externo

Estimativa do campo crítico: iguala-se a energia fornecida pelo campo com a massa de repouso do par e^+e^-

$$eE_c(c\Delta t) \approx 2m_e c^2$$

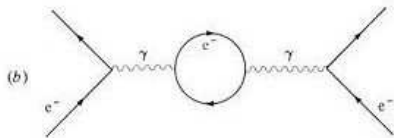
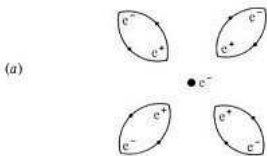
$$eE_c(\hbar/2m_e c) \approx 2m_e c^2$$

$$\implies E_c \approx \frac{4m_e^2 c^3}{e\hbar} \approx 10^{18} \text{ V/m.}$$



- **Polarização do vácuo:** na presença de uma carga elétrica, o vácuo se polariza, blindando parcialmente a carga. Isso altera o potencial sentido por outra carga (**potencial de Uehling**):

(a) Virtual electron-positron pairs shield the 'bare' electric charge at very small distances. This effect can be calculated by evaluating Feynman diagrams such as the shown in (b).



Para $r \gg 1/m$, mostra-se que

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right)$$

- **Carga efetiva:** maior para distâncias menores, à medida que se penetra na nuvem blindante de pares virtuais e^+e^-
- Esse efeito é observado em experimentos de altas energias (Por exemplo, no **espalhamento Bhabha** $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$)

- **Deslocamento Lamb;**
 - De acordo com a eq. de Dirac, os níveis $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ do átomo de hidrogênio são degenerados;
 - Experimento de **Lamb e Retherford (1947)**: mede a transição $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$
 - **Bethe (1947)**: átomo acoplado ao campo de radiação (sugestão de **Oppenheimer** e **Schwinger**);
 - Renormalização da massa do elétron.
- **Emissão espontânea:**
 - Introduzida por **Einstein (1917)**, mas calculada pela 1ª vez via EDQ por **Dirac (1927)**;
 - Um átomo excitado, mesmo no vácuo e longe de tudo, inevitavelmente decai
 - **Purcell (1946)**: primeiro a analisar a influência da vizinhança na emissão espontânea; marco inicial da **EDQ** de cavidades.
 - **Fronteiras** podem causar **aumento**, **diminuição** ou mesmo **supressão** da taxa de emissão.

- A propagação da luz é afetada por: **campos EM, placas materiais**, $T \neq 0$, .. Pode-se mostrar que

$$\delta \langle v \rangle = -\frac{44}{135} \frac{\alpha^2}{m_e^4} \rho_0 \quad (\text{"fórmula universal"}),$$

onde ρ_0 é a densidade de energia do vácuo.

- **Efeito Scharnhorst (1990)**: luz propagando-se entre placas condutoras (efeito muito pequeno para ser observado)

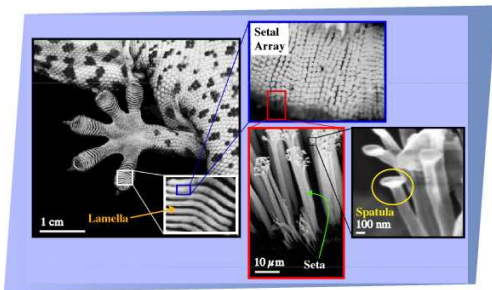
$$\langle v \rangle = 1 - \frac{44}{135} \frac{\alpha^2}{m_e^4} \left(-\frac{\pi^2}{720a^3} \right) > 1 \quad (\text{há controvérsias})$$

- **Birrefringência** do vácuo na presença de campo magnético
 - **Adler (1970)**: explicação no contexto da **EDQ**;
 - medidas recentes sugeriam birrefringência e **dicroísmo** (**PVLAS-2006**), porém, medidas mais recentes (**PVLAS-2007**) foram **inconclusivas!**
 - **Nova física?! axions, EDQ não-comutativa,..?**
 - partículas a partir de **experimentos de magneto-ótica?!**

- Forças de van der Waals dispersivas: mecanismo de adesão de lagartixas!



Patas com **milhões** de cerdas (minúsculos pelos) ($\approx 500.000/cm^2$), que se subdividem em (~ 5000) filamentos ainda menores.



$$\frac{F}{Area} \approx 1 atm$$

1 cerda: $F \approx 20 \mu N$

patas: $F \approx 10 N$

Não são só as lagartixas que esse mecanismo, mas **também**

algumas espécies de **aranhas!**



*“Strong adhesion between two hydrophobic surfaces in air, such as adhesion of hydrophobic setae to the hydrophobic GaAs and Si MEMS surfaces, demonstrates that **the mechanism of adhesion is van der Waals dispersive force ..**”*

K. Autumn et al PNAS 2002

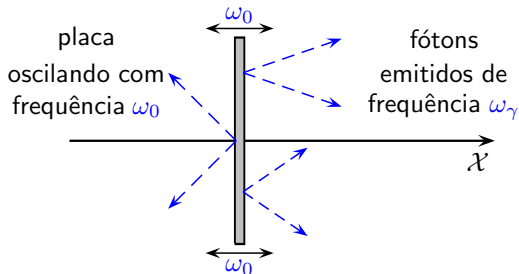
E - experimento com **material sintético imitando patas de lagartixa**

Obs: filamentos com **eficiência máxima** → **10 atm!**

- **Forças de Casimir e Polder (1948):**
 - Influência do **retardamento** na força de van der Waals-London
 - Cálculos feitos para átomo-parede metálica e átomo-átomo.
- **Efeito Casimir (1948):**
 - força entre corpos neutros no regime retardado devido à alteração na **EPZ** do campo eletromagnético causada pela presença desses corpos.
 - **Origem na química coloidal.** Porém, ganhou vida própria e, atualmente, é um tema muito interdisciplinares:
 - **física atômica** (forças dispersivas)
 - **ótica quântica** e EDQ de cavidades (efeitos de fronteira)
 - **física da matéria condensada** (filmes finos, etc.)
 - **teoria quântica de campos** (modelo de sacola do MIT)
 - **gravitação e cosmologia** (o problema da Cte cosmológica)
 - **física matemática** (novas técnicas de regularização/renormalização)
 - **nanotecnologia** (construção de MEMS e NEMS)
 - modelos com **dimensões extras compactificadas** (estabilização)

- Efeito Casimir dinâmico:

- **forças dissipativas** sobre fronteiras em movimento no vácuo e **criação de partículas**;
- nome popularizado por **Schwinger (1992-1994)** quando tentava explicar o fenômeno da **sonoluminescência**;
- estreita relação com o **Teorema de Flutuação-Dissipação**;
- analogia com **potencial externo dependente do tempo**;
- Já se manifesta mesmo com **uma placa** em movimento;



Para movimentos não-relativísticos, mostra-se que $\omega_\gamma \leq \omega_0$.

Breve história da energia de ponto-zero (EPZ)

- Surgiu pela 1^a vez na 2^a teoria de Planck sobre radiação de corpo negro (1912) (antes de sua derivação em 1925),
- **Modelo de Planck:** absorção contínua, mas emissão discreta; cada vez que atingia uma energia múltipla inteira de $h\nu$ tinha uma probabilidade p de emití-la integralmente; Planck obteve

$$\langle U \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/K_B T} - 1} + \frac{1}{2}h\nu.$$

- **Einstein e Stern (1913):** incluíram rotações moleculares no cálculo do calor específico de H_2 ; foram os 1^{os} a perceber que somente com a EPZ se obtém $\langle U \rangle \rightarrow K_B T$ para $T \rightarrow \infty$.
- Embora, os osciladores de Planck tivessem EPZ, o mesmo não ocorria com o campo eletromagnético:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/K_B T} - 1}; \quad \rho(\nu) \rightarrow 0 \text{ para } T \rightarrow 0.$$

- **Debye (1914) e difração por redes cristalinas**
 - efeitos térmicos reduzem a difração de raios-X por cristais;
 - também a EPZ deveria ter esse efeito, mesmo para $T \rightarrow 0$:

$$e^{-\kappa^2 K_B T / 2m\omega_0^2} \quad \text{—} \quad \text{para altas temperaturas}$$

$$e^{-\hbar\kappa^2 / 2m\omega_0^2} \quad \text{—} \quad \text{para } T \rightarrow 0$$

onde $\vec{\kappa} := \vec{k}_{esp} - \vec{k}_0$ (ordem de grandeza correta).

- **Mulliken (1924)**: analisou os espectros de duas moléculas diatômicas com isótopos diferentes ($B^{10}O^{16}$ e $B^{11}O^{16}$):

“if one assumes that the true values of the vibrational quantum numbers are not n and n' but each $1/2$ unit greater ... It is then probable that the minimum vibrational energy of BO (and doubtless of other) molecules is $1/2$ quantum”.

- **Nernst (1916)**: 1º a sugerir que cada modo do campo eletromagnético livre também tivesse EPZ.
- **Jordan (1926)**: 1º a obter, formalmente, a EPZ em TQC, ao quantizar o campo escalar livre: $E_0 = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$

Mas nem todos aceitavam a EPZ,

“A esta altura deve ser mencionado que é mais consistente não introduzir aqui a EPZ de $1/2 \hbar \nu$ por grau de liberdade, em contraste com o oscilador material. Porque, por um lado, isto levaria a uma energia infinitamente grande por volume devido aos infinitos graus de liberdade; por outro lado esta energia não seria observável já que não pode ser emitida, absorvida ou difratada - logo não pode ser presa por paredes - e não produz nenhum efeito gravitacional, como é evidente pela experiência.”

W. Pauli (1933)

- **Casimir (1948)**: força entre corpos neutros calculada a partir da variação da **EPZ** do campo EM causada por eles;
- **Welton (1948)**: **flutuações na trajetória** do elétron induzidas por **flutuações quânticas do vácuo** dão origem a uma correção ao potencial coulombiano:

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{1}{6} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \nabla^2 V(\mathbf{r})$$

$$\langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle = \frac{e^2}{m^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^4} \langle \mathbf{E}_\omega^2 \rangle$$

- **Feynman (1961)**: mudança no índice de refração dentro de uma caixa de volume fixo V quando átomos são colocados dentro dela \rightarrow mudança nas frequências dos modos \rightarrow mudança na **EPZ**.

- A história da **EPZ** é longa e o número de personagens, grande: (Planck, Einstein, ..., Heisenberg, Jordan, Pauli, ..., Welton, **H.B.G. Casimir**, ..., Zeldovich, Feynman, Power, Weinberg, ...)
- Mesmo após 100 anos de existência, a EPZ ainda é motivo de **controvérsias**: há, por ex., incompatibilidade entre as energias do vácuo previstas pela **TQC** e pela **Relatividade Geral**.
 - Com **corte** apropriado, a **TQC** prevê a densidade de energia

$$\rho_{EPZ} = \frac{2\pi^2 \hbar \nu_{max}^4}{c^3} \approx 10^{94} \text{ kg/m}^3$$

- Dados observacionais relativos à **cte cosmológica** sugerem

$$\rho_{RG} = \leq 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

“Apenas” uma discrepância de **120 ordens de grandeza!!**

A ação desta força [entre placas] foi demonstrada por engenhosos experimentos e eu penso que nós podemos afirmar que a existência da EPZ do campo eletromagnético foi estabelecida sem qualquer dúvida.

H.B.G. Casimir (1998)

A existência da EPZ foi espetacularmente comprovada pelo efeito Casimir

V. Sahni e A. Starobinsky (2000)

A confirmação experimental do efeito Casimir não estabelece a realidade das flutuações de ponto zero. (...) O conceito de EPZ é uma ajuda heurística e computacional na descrição do efeito Casimir, mas não uma necessidade. (...) Então existem boas razões para ser cético, evitando a formulação padrão da TQC e a EPZ que ela traz consigo.

R. Jaffe (2005)

Forças de van der Waals dispersivas

- **Johannes Diederik van der Waals (1837 - 1923)**: percebeu que o **tamanho** das moléculas e as **forças intermoleculares** eram cruciais na descrição dos gases.
- Eq. de estado para **gases reais**: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT$;
“*Sobre a continuidade do gás e do estado líquido*” (1873)



Prêmio Nobel de Física de 1910.

“that there can be no doubt that the name of Van der Waals will soon be among the foremost in molecular science”

James Clerk Maxwell

- Seus trabalhos guiaram experimentos que levaram à liquefação do hidrogênio (**J.Dewar 1898**) e do hélio (**K. Onnes 1908**)

Tipos de forças de van der Waals

- **força de van der Waals de orientação:** moléculas polares.
 - Força eletrostática entre 2 dipolos (**fixos**) $\sim 1/r^4$.
 - No cálculo da força entre moléculas polares (de água, por ex) os **efeitos térmicos** devem ser considerados (**Keesom1921**):

$$U = -\frac{2p_1^2 p_2^2}{3(4\pi\epsilon_0)^2 K_B T} \frac{1}{r^6} \implies F \sim \frac{1}{r^7},$$

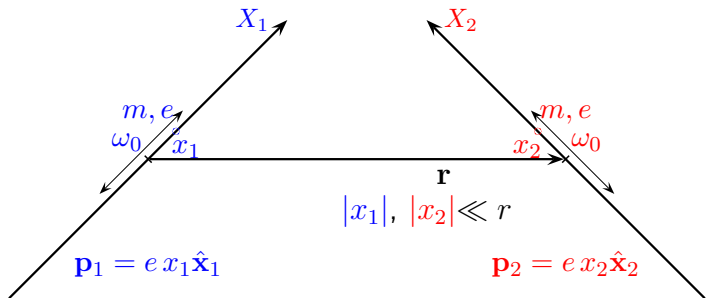
válida para $K_B T \gg p_1 p_2 / (4\pi\epsilon_0 r^3)$.

- Força atrativa cuja magnitude diminui quando T cresce (todas as configurações passam a ser igualmente acessíveis)
- **força de van der Waals de indução:** entre uma molécula polar e outra apolar.

Seja p_1 o dipolo permanente da molécula 1 e p_2 o dipolo induzido na molécula 2. Como $\mathbf{p}_2 = \alpha_2 \mathbf{E}_1$, temos

$$U_{21} = -\frac{1}{2} \alpha_2 \mathbf{E}_1^2 \sim -\frac{\alpha_2 p_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}.$$

- **força de van der Waals de dispersão:** moléculas **apolares!**
 - só foi possível entendê-la após o advento da Mecânica Quântica (**London 1930**).
 - Origem nas **flutuações das distribuições de carga** das moléculas
 - **cálculo semiclassico:** modelo dos **dipolos flutuantes**.



Eixos fixos, porém, arbitrários. As equações de movimento são

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{m} e \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}}_1$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{1}{m} e \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$$

- \mathbf{E}_1 é o campo do **dipolo oscilante 1** na posição do **dipolo 2** (desprezamos as variações de \mathbf{E}_1 ao longo do **dipolo 2**).
- \mathbf{E}_2 é o campo do **dipolo oscilante 2** na posição do **dipolo 1** (desprezamos as variações de \mathbf{E}_2 ao longo do **dipolo 1**).
- **Campo de um dipolo oscilante:** por ex., $\mathbf{E}_1(t)$ é dado por

$$\mathbf{E}_1(t) = \frac{3\left(\mathbf{p}_1(t_r) \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}_1(t_r)}{r^3} + \frac{[\dots]}{cr^2} + \frac{[\dots]}{c^2r},$$

onde $t_r = t - r/c$ é o **tempo retardado** da origem.

- Para curtas distâncias, **1º termo** é dominante e os efeitos de retardamento são desprezíveis; ($t_r \approx t$). Obtemos, então,

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = K x_2 \quad \text{e} \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = K x_1,$$

onde definimos K e o fator de orientação dipolo-dipolo, Q_{12} ,

$$K = \frac{Q_{12} e^2}{mr^3}; \quad Q_{12} = 3(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2.$$

- **Desacoplando** o sistema, encontramos seus modos normais, cujas frequências são dadas por

$$\omega_{\pm} = (\omega_0^2 \pm K)^{1/2} .$$

Expandindo em potências de K/ω_0^2 , obtemos (2^a ordem)

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_0 \left(1 \pm \frac{K}{\omega_0^2} \right)^{1/2} \\ &\approx \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\pm \frac{K}{\omega_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\pm \frac{K}{\omega_0^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

- **Quantizar** o sistema significa quantizar 2 osciladores desacoplados. Para o **estado fundamental**, temos

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_+ + \frac{1}{2} \hbar \omega_- = \hbar \omega_0 - \frac{\hbar K}{8\omega_0^3}$$

A energia de interação de van der Waals **dispersiva** é dada pela **variação na energia do estado fundamental** do sistema causada pelas flutuações dos dipolos,

isto é, **variação da EPZ** do sistema devido à interação entre eles

$$V(r) = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-) - 2 \times \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = -\frac{\hbar}{8\omega_0^3} \left(\frac{Q_{12}e^2}{mr^3} \right)^2 .$$

Por conveniência, reescrevemos $V(r)$ na forma

$$V(r) = -\frac{Q_{12}^2\hbar\omega_0}{8r^6} \left(\frac{e^2}{m\omega_0^2} \right)^2 = -\frac{Q_{12}^2\hbar\omega_0\alpha_{cl}^2}{8r^6}$$

- **Eisenschitz e London (1930)**: 1^{os} a obter via **Mec. Quânt.** perturbativa a força entre 2 átomos neutros mas **polarizáveis**:

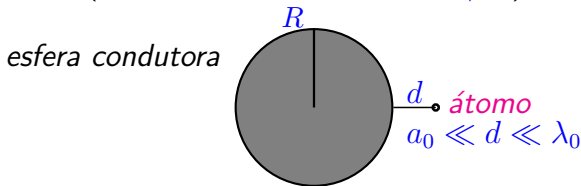
$$V_{\text{Lon}}(r) \approx -\frac{3\hbar\omega_0\alpha^2}{4r^6} \implies \vec{f}_{\text{Lon}} \approx -\frac{9\hbar\omega_0\alpha^2}{2r^7} \hat{r} ,$$

onde

α \longrightarrow polarizabilidade estática
 ω_0 \longrightarrow frequência de transição dominante.

A presença de \hbar mostra o caráter **genuinamente quântico** da força de London.

- Embora rudimentar, o modelo de **dipolos flutuantes** nos fornece **resultados muito bons**.
- Pode-se aplicar esse modelo a outros sistemas: átomo-parede, átomo-esfera (transição dominante $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$)



Átomo-esfera condutora: esse modelo nos fornece a energia de interação não-retardado (**Taddei et al 2009**)

$$U_{esf}(d; R) = U_{plano}(d)f(d/R),$$

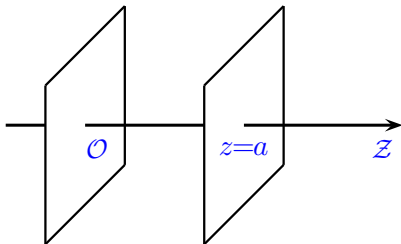
onde (**Lennard-Jones, 1932**)

$$U_{plano}(d) = -\frac{\hbar\omega_0\alpha}{8d^3} \longleftrightarrow \text{átomo - plano infinito}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi/2)^3} + \frac{\xi}{2(1 + \xi/2)^2} - \frac{\xi^3}{(1 + \xi)^4}.$$

Efeito Casimir: sua história e o método de Casimir

- O **efeito Casimir** consiste na atração entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras no vácuo (previsto por **H.B.G. Casimir** em 1948).



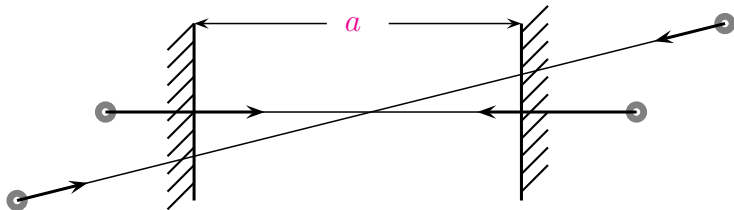
- Valor numérico previsto por Casimir:

$$\frac{F(a)}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \approx -0,013 \frac{1}{(a/\mu m)^4} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

Para $a = 1 \mu m$ temos: $P_{Cas} \approx 10^{-8} P_{atm}$

- Nessa situação **idealizada** e com $L^2 = 1 \text{ cm}^2$, a $F_C \approx 10^{-7} \text{ N}$.

- **Condutividade finita dos metais:** diminuem as forças de Casimir (**metais reais aprisionam menos o campo**).
- O efeito Casimir tem sua origem relacionada às forças de van der Waals **dispersivas** (experimentos com **colóides**).
- Forças entre corpos macroscópicos **rarefeitos**:
 - nesse caso, os efeitos da **não-aditividade são desprezíveis**;
 - Força obtida por integração das forças interatômicas (**London** $\rightarrow \gamma = 7$; **Casimir/Polder** $\rightarrow \gamma = 8$)



$$\vec{f} = -\frac{C}{r^\gamma} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{slabs}}{Area} = -\frac{C'}{a^{\gamma-4}}$$

- **Estabilidade de colóides:** $F. \text{elétrica} \times F. \text{de van der Waals}$; anos 40: Teoria DLVO (Derjagin, Landau, Verwey e Overbeek)
- **Desacordo teoria-experimento:** para explicar a estabilidade a força dispersiva deveria cair **mais rapidamente** que $1/r^7$ para **grandes distâncias** (**Verwey/Overbeek**, anos 40).
- **Conjectura de Overbeek:** efeitos de retardamento.
- **OBS:** tais efeitos são desprezíveis para $r/c \ll 1/\omega_{mn}$ e começam a ser relevantes para $r/c \sim 1/\omega_{mn}$.
- **Casimir e Polder 1948:** "*The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*"
Obtiveram a interação **retardada** (**EDQ perturbativa**)

$$V_{\text{Ret}}(r) = -\frac{23\hbar c}{4\pi} \frac{\alpha_A \alpha_B}{r^7} \implies f_{\text{Ret}} \sim \frac{1}{r^8}$$

Obs: Tabor e Winterton 1968 mediram essa mudança de lei de potência (regime **não-retardado** $\sim \frac{1}{r^7}$ \rightarrow regime **retardado** $\sim \frac{1}{r^8}$)

- Comentário de **Casimir** e **Polder** ao final do artigo de 1948:
“The very simple form of Eq. (56) and the analogous formula (25) suggest that it might be possible to derive these expressions, perhaps apart from the numerical factors, by more elementary considerations. This would be desirable since it would also give a more physical background to our result, a result which in our opinion is rather remarkable. So far we have not been able to find such a simple argument.”
- **A conversa com Niels Bohr e a energia de ponto-zero**
*‘In the summer or autumn 1947 ... (but I am not absolutely certain that it was not somewhat earlier or later) I mentioned my results to Niels Bohr, during a walk. “That is nice”, he said, “That is something new.” I told him that I was puzzled by the extremely simple form of the expressions for the interaction at very large distance and he mumbled something about **zero-point energy**. That was all, but it put me on a new track.’*

- 'I found that calculating *changes of zero-point energy* really leads to the same results as the calculations of Polder and myself...' (Colloque sur la théorie de la liaison chimique, Paris, abril de 1948).

publicado em : J.Chim.Phys. **46**, 407 1949

- '... if there were two isotopoes of empty space you could really easy confirm the existence of the zero point energy. Unfortunately, or perhaps fortunately, there is only one copy of empty space and if you cannot change the atomic distance than you might change the shape and *that was the idea of the attracting plates.*'(Leipzig, 1998)
- 'On 29 May, 1948, I presented my paper *On the attraction between two perfectly conducting ..* at ... It was published in the course of the year..'

publicado em : Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948)

O método de Casimir

- **Novidade:** não estava no fato de 2 corpos neutros e sem multipolos permanentes se atraírem, mas sim no **método** utilizado (**Energia de Ponto Zero**).
- A **energia do vácuo** (do campo eletromagnético) é dada por

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

expressão **divergente**, ainda sem utilidade.

- No entanto, corpos no vácuo alteram a **EPZ** do campo. **Em 1^a aproximação**, a presença dos corpos é simulada por condições de contorno **bem idealizadas**.
- Para placas **perfeitamente condutoras**, temos

$$\vec{E} \times \hat{n}|_{placas} = \vec{0}; \quad \vec{B} \cdot \hat{n}|_{placas} = 0.$$

- É a **diferença entre as EPZ** na **ausência** e na **presença** dos corpos (**ambas divergentes**) que importa no cálculo da força.
- Para dar sentido às manipulações algébricas, é necessário trabalhar com **quantidades finitas**.
- **Regularização**: modifica-se a expressão introduzindo um parâmetro contínuo que **controle a divergência**.
- **Expressão regularizada = expressão finita**. Mas, no final dos cálculos, devemos retirar o “**parâmetro regularizador**”.
- A **energia de Casimir** é definida, então, por

$$\mathcal{E}_{Cas} := \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_I - \left(\sum_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_{II} \right] :$$

I – regularizada e **com** condições de contorno.

II – regularizada mas **sem** condições de contorno.

s – **parâmetro regularizador**

Exemplo: 2 placas perfeitamente condutoras (versão unidimensional, por simplicidade!)

- “Placas” em $x = 0$ e $x = a$ (o campo se anula nesses pontos)
- As frequências dos modos do campo fora das placas não são alteradas, mas as frequências entre as placas ficam discretizadas: $\omega_n = |k_x|c = n\pi c/a$, com $n = 1, 2, \dots$
- EPZ entre as placas, **com CC** e não regularizada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \frac{n\pi c}{a}$$

- EPZ entre as placas, **sem CC** e não regularizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} dk_x \frac{1}{2} \hbar |k_x| c = \frac{a\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa$$

- **Regularizando**, subtraindo e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos a \mathcal{E}_c :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_c(a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} e^{-\epsilon n\pi/a} - \frac{a\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa e^{-\epsilon \kappa} \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n\pi/a} + \frac{a\hbar c}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \int_0^{\infty} d\kappa e^{-\epsilon \kappa} \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\hbar c}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{e^{\epsilon\pi/a} - 1} \right) + \frac{a\hbar c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right\} \\
 &= \frac{\hbar c\pi}{8a} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sinh^2(\epsilon\pi/2a)} - \left(\frac{2a}{\pi\epsilon} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

- Os 2 termos dentro dos colchetes divergem para $\epsilon \rightarrow 0$.
Mas o mesmo não ocorre com a diferença entre eles!
- Não é difícil mostrar que

$$\frac{1}{\sinh^2(\epsilon\pi/2a)} = \left(\frac{2a}{\pi\epsilon} \right)^2 - \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies \mathcal{E}_c(a) = -\frac{\hbar\pi c}{24a}$$

Comentários finais

Forças dispersivas: ainda nos surpreendendo

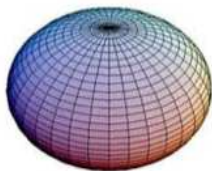


- *“The formation of a thin liquid layer on ice has been identified as a crucial element in the generation of large potentials in thunderstorms. The possibility of such a close connection between **zero-point fluctuations**, generally thought of as among the most feeble of effects, and one of **nature’s most powerful and awesome spectacles** cannot go unnoticed.” (Lamoreaux - 2007)*



- *“Based on this understanding, we propose a new model for the end state of small, **rapidly rotating asteroids** which allows them to be comprised of relatively fine regolith grains held together by **van der Waals cohesive forces.**”*
(Scheeres et al - [2010](#))

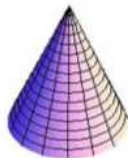
- Outras geometrias: átomo próximo a **superfícies não-triviais**



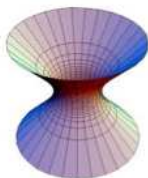
Elipsóide Oblato



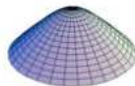
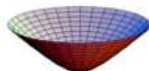
Elipsóide Prolato



Cone



Hiperbolóide de
uma folha



Hiperbolóide de
duas folhas

Efeito Casimir: elaborações

- **Experimentos:** 1^a observação feita por Sparnaay em 1958 (apenas compatibilidade); a partir de 1997 há inúmeros experimentos de alta precisão desse efeito.
- **Outros campos:** qualquer campo relativístico sob CC exibe, em princípio, o efeito Casimir;
- **outras geometrias** (casca esférica, esfera e uma placa,...);
- **Condições de contorno mais realistas:** condutividade finita dos metais, rugosidade, efeitos térmicos, ...
- **Outras técnicas:** globais (função ζ generalizada, método de Schwinger, fórmula de Lifshitz (1956), método do espalhamento.. ; locais (tensor energia-momento,..)
- influência de **dimensões extras compactificadas**; de **campos externos**: por ex., folhas de grafeno sob campo magnético (campos fortes \implies força quantizada)

ARTIGOS

- S.K. Lamoreaux, *Physics Today*, **February (2007)** 40-45.
- C. Farina, *Braz. J. Phys.* **36 (2006)** 1137-1149.
- C. Farina, F.C. Santos and A.C. Tort, *Am. J. Phys.* **67 (1999)** 344-349.

LIVROS

- Verwey and Overbeek **1948**; Edwin Power **1964**
- Margenau and Kestner **1969**; Dieter Langbein **1974**
- Mahanty and Ninham **1977**; Milonni **1994**
Craig and Thirunamachandran **1998**; Milton **2001**
- Rowlinson **2002**; Adrian Parsegian **2006**
- Bordag, Klimchitskaya, Mohideen and Mostepanenko **2009**
Dalvit-Milonni-Roberts-Rosa (eds. **2010**)
- Akbar Salam, **2010**; Israelashvili **2011**; Buhmann **2012**

MUITO OBRIGADO!