

Introdução à quântica

Projeto Alexandria

Universidade Federal do Rio de Janeiro

2 de Maio de 2012

Capítulo 1

Radiação de corpo negro

Escolhemos abrir nossa discussão sobre os conceitos da física quântica a partir da radiação de corpo negro. Não somos nisto nada originais, sendo esta a própria origem histórica da teoria quântica. Exporemos nas próximas linhas nossa motivação para tal ponto de partida. A tão sabida dificuldade dos conceitos quânticos repousa em larga medida na profunda falta de intuição que o nosso mundo cotidiano nos lega ao analisamos os fenômenos microscópicos. Fenômenos - que se transpostos ingênuamente a uma linguagem clássica geram imagens bizarras - conferem à física quântica uma misticidade que tem sido muitas vezes perigosamente utilizada. Seguiremos neste primeiro capítulo, ao menos nos pontos principais, a cronologia da gênese quântica para podermos identificar onde e porque físicos formados dentro e enraizados na física clássica foram levados a proporem conceitos tão distantes de nossa realidade usual e a provocarem uma verdadeira revolução nas bases fundamentais da física, ainda hoje profundamente discutida, debatida e controversa. Devemos, contudo, deixar bem claro de partida que não procuramos apresentar a historiografia dos conceitos da mecânica quântica. Esta árdua tarefa demandaria compreendermos precisamente o quadro científico da época e seguirmos os passos erráticos dados pelos desbravadores deste novo terreno científico, o que, embora

fascinante, foge completamente aos nossos propósitos ¹. Seremos, portanto, ao longo do texto deliberadamente anacrônicos, misturando a nosso gosto passos antigos com aplicações e interpretações recentes, visando única e exclusivamente uma apresentação didática e conceitualmente esclarecedora.

1.1 Definição de corpo negro e o problema da emissão espectral de energia

Os objetos com os quais estamos familiarizados no dia-a-dia, em geral, não emitem luz visível própria. A exceção mais famosa são as estrelas, o sol sendo o nosso representante mais próximo. Desde que o homem reconheceu na luz uma onda eletromagnética, sabe-se que luz visível é apenas uma estreita faixa no infinito espectro de possíveis frequências. Todo corpo emite radiação² própria, cuja frequência depende de sua temperatura - quanto maior a temperatura, maior a frequência emitida. Pode-se perceber isto rapidamente na chama de um isqueiro, a parte da chama mais próxima de sua produção, logo sua parte mais quente, é azulada. Mais perto da borda há a emissão em mais baixas frequências, se aproximando cada vez mais do vermelho. Os corpos terrestres, em geral, não estão quentes o suficientes para emitir luz visível e emitem radiação infra-vermelha. A cor que conferimos aos objetos cotidianos é fruto da frequência luminosa que ele é capaz de refletir. Se um corpo absorve todo o espectro visível, dizemos que tal corpo é preto. Mesmo os objetos pretos do nosso dia-a-dia, não absorvem todo o espectro da radiação, há sempre uma frequência alta o suficiente a qual não interage com estes objetos - o corpo será transparente se iluminado por radiação contendo apenas frequências superiores a esta.

¹Uma minuciosa reconstrução, precisa historiograficamente e elucidadora conceitualmente está feita em JAMMER(1966). Referências mais específicas sobre os tópicos discutidos serão fornecidos ao longo de nossa discussão.

²Geralmente guarda-se a palavra *luz* para radiação visível

Considere, agora, um corpo a uma temperatura T . Desejamos estudar o quanto este corpo emite de radiação de uma certa frequência, ν , por unidade de tempo. Chamaremos esta potência de emissão de E_ν . O corpo é caracterizado, ainda, pela fração da radiação incidente que ele é capaz de absorver. Para radiação de frequência ν , chamaremos esta fração de coeficiente de absorção, A_ν . Emissão e absorção são problemas relacionados. De fato, no equilíbrio, a potência emitida pelo corpo deve ser igual a potência por ele absorvida³, caso contrário sua energia interna variaria e ele não se estaria em equilíbrio. Kirchhoff, ao fim da década de 1850, encontrou tal relação, ao mostrar que a razão E_ν/A_ν dependia apenas da frequência ν da radiação e da temperatura T do corpo. Em outras palavras, a razão E_ν/A_ν é uma função universal da natureza, na medida em que não depende das propriedades específicas dos corpos, mas, tão somente, de ν e T . A busca por funções universais goza de um estatuto privilegiado em física, na medida em que seu caráter absoluto filtra, na miríade de propriedades heterogêneas dos mais diversos corpos existentes, algo que a todos cabe obedecer. É sem surpresa, portanto, o rápido destaque conferido a este trabalho kirchhoffiano pela comunidade científica. Derivações teóricas alternativas e realizações³ experimentais consolidaram em pouco tempo o seu prestígio⁴. Restava, então, encontrar qual era esta função universal E_ν/A_ν . É no caminho de obtenção teórico desta função que mora um obstáculo intransponível para a física clássica.

Para lidar com o problema, Kirchhoff introduziu a idealização de corpo negro, i.e., um corpo capaz de absorver toda a radiação incidente para todos os comprimentos de onda. A conveniência desta idealização é consequência de termos para um corpo negro $A_\nu = 1$ para todo ν . Logo, encontrar a função universal buscada é equivalente a resolver o problema da emissão de radiação do corpo negro, ou seja, determinar quanto de radiação

³Não confundir a potência absorvida com A_ν , o coeficiente de absorção. Este último é um número entre 0 e 1 e depende apenas do próprio corpo. A potência absorvida, por outro lado, depende de toda a configuração do sistema, uma vez que o quanto o corpo absorverá dependerá do quanto os outros corpos que compõem o sistema estão emitindo.

⁴Uma extensa lista de referências pode ser encontrada na seção 1.1 de JAMMER(1966).

um corpo negro a uma dada temperatura emite em cada frequência. Como o conjunto de frequências recebe o nome de espectro, o problema colocado é conhecido como o problema de determinar a emissão espectral de um corpo negro. O caminho percorrido para determiná-la foi extremamente tortuoso - inúmeras tentativas foram postas em jogo, algumas totalmente empíricas, outras baseadas, ao menos parcialmente, em princípios teóricos bem estabelecidos, e nenhuma sobrevivia à comparação com os experimentos. Algumas das propostas até funcionavam bem em uma certa faixa do espectro, porém falhavam completamente em outras. Medidas desesperadas começaram a ser tomadas - o terreno estava pronto para o surgimento de algo realmente novo. Porém o novo era tão novo, sobremaneira distinto de tudo o que se compaginava nos períodos científicos anteriores, que, mesmo após Planck haver proposto em 1900⁵ um modelo em excelente acordo com os experimentos, anos foram necessários para compreender o ponto essencial do trabalho de Planck, a saber: para se estar em acordo com os dados experimentais, a emissão de radiação do corpo negro tem de ser descontínua. De fato, em seu trabalho seminal, Planck não menciona em nenhum lugar explicitamente a discretização da energia emitida. Pelo contrário, ele defende durante muito tempo que seu trabalho não requer tal descontinuidade na emissão⁶. Assim, mesmo depois do trabalho de Planck, diversos físicos continuaram buscando erigir modelos clássicos para explicar o fenômeno. O mais importante e famoso destes modelos pós-Planck é conhecido como lei de Rayleigh-Jeans, cuja formulação final aparece em 1905. Tal lei fornece resultados excelentes para baixas frequências, porém falha completamente em descrever o comportamento experimental para altas frequências. Assim, as buscas continuavam por uma explicação *satisfatória* da radiação de corpo negro. Em 1908, por meio de argumentos bem gerais, Lorentz re-obteve a lei de Rayleigh-Jeans.

⁵Ele apresentou seu trabalho à sociedade física de Berlin em 14 de dezembro de 1900, data considerada hoje em dia simbolicamente como o nascimento da física quântica.

⁶A motivação de Planck esteve muito relacionada ao trabalho de Boltzmann em mecânica estatística e termodinâmica. É por este viés que Planck interpreta seu próprio trabalho. Para maiores detalhes, consulte (KUHN1978).

Isto o convenceu de que o fenômeno da radiação do corpo negro é incompatível com a física clássica e que é impossível chegar à fórmula introduzida por Planck mediante um raciocínio enraizado na física clássica. Apenas a partir de então, em grande parte devido ao enorme peso carregado pelo nome de Lorentz, a comunidade científica começou a reconhecer no trabalho planquiano de 1900 um rompimento fundamental com a física clássica. Apenas então, a interpretação dada por Einstein em seu importante trabalho de 1906 começou a ser aceita. Nele, Einstein diz

[...] as bases teóricas nas quais a teoria da radiação de Planck repousa diferem daquelas da teoria de Maxwell [i.e. do eletromagnetismo] e da teoria do elétron. A diferença é precisamente que a teoria de Planck implicitamente faz uso da hipótese do quantum de luz [...].⁷

Nesta afirmação, Einstein vai ainda além da ideia de uma emissão descontínua e afirma que a própria natureza da luz é quantizada. Este debate será discutido em detalhe mais adiante em nossa exposição.

Na próxima seção discutiremos porque a teoria clássica é incapaz de explicar a emissão espectral do corpo negro. Na seguinte, mostraremos como uma emissão discreta de energia é capaz de resolver o problema.

1.2 A descrição clássica e a catástrofe do ultravioleta

Conforme discutido na seção anterior, sabemos que a emissão espectral do corpo negro é uma função universal, independentemente das propriedades específicas do corpo em questão. Desta forma, consideraremos o corpo negro mais simples possível: um composto por uma coleção de osciladores harmônicos de todas as frequências possíveis. Osciladores harmônicos são muito convenientes, pois a matemática envolvida é bem simples e seu comportamento físico é bem conhecido. O exemplo mais comum de oscilador harmônico

⁷Tradução livre do artigo EINSTEIN(1906).

é a mola ideal, cuja frequência de oscilação é definida pela sua constante elástica e por sua massa. Os osciladores que formam nosso corpo negro serão chamados de osciladores materiais e são formados basicamente por um elétron que se move harmonicamente em torno de sua posição de equilíbrio. Portanto, os elétrons estão acelerados durante seu movimento. Pelo eletromagnetismo de Maxwell, sabe-se que cargas aceleradas emitem radiação. Esta é a origem física, no nosso modelo de osciladores materiais, da energia irradiada pelo corpo negro.

Ao se calcular a energia emitida por cada oscilador chega-se a lei de Rayleigh-Jeans. Veja na figura 1.1 a comparação entre esta lei e a experiência.

Apesar do resultado ser excelente para baixas frequências, ele falha grosseiramente para altas frequências. Ainda pior, considere a área abaixo do gráfico. Ela corresponde à soma para todas as frequências da energia emitida em cada frequência, ou seja, corresponde à energia total emitida pelo corpo negro. De acordo com a lei de Rayleigh-Jeans ela deveria ser infinita. Isto é completamente absurdo e mostra que independentemente de qualquer resultado experimental tal lei é insustentável. Cabe acrescentar que a partir de considerações termodinâmicas bem gerais já era conhecida então a lei de Stefan-Boltzmann, segundo a qual podíamos calcular a energia total (finita, naturalmente) emitida pelo corpo negro. O cálculo teórico estava em ótimo acordo com a experiência e qualquer modelo para a emissão espectral de energia deveria re-obtê-la. Como vimos, o grande problema teórico se encontra em explicar a emissão para altas frequências. A divergência infinita apresentada pela lei de Rayleigh-Jeans neste regime levou Paul Ehrenfest a denominá-la *catástrofe do ultravioleta*.

Será fisicamente esclarecedor compreender porque qualquer teoria clássica está de fato fadada ao fracasso para altas frequências. Para tanto, é necessário discutirmos brevemente um resultado importante da mecânica estatística clássica⁸ conhecido como o

⁸Esta importante área da física é baseada no reconhecimento de que a aplicação das leis da mecânica clássica a um sistema de muitas partículas - um gás por exemplo - é inviável. Portanto, se desejarmos obter informações físicas relevantes para este sistema, devemos renunciar ao conhecimento da trajetória e

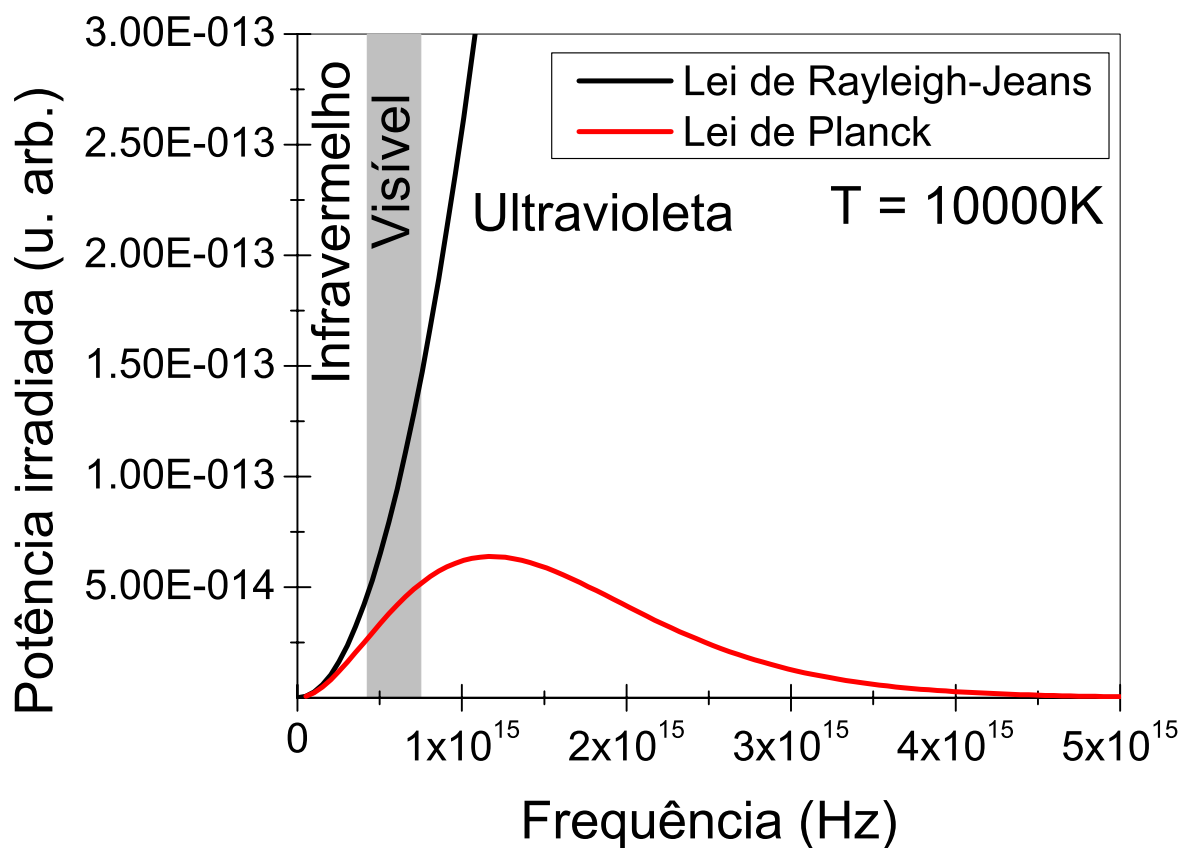


Figura 1.1: Comparação entre a previsão clássica de Rayleigh-Jeans e o experimento. Note que para baixas frequências há um bom compromisso entre as duas, porém para altas frequências o desacordo é total.

teorema da equipartição da energia. Considere um sistema com muitas partículas. No equilíbrio, a energia total deste sistema estará igualmente repartida entre todos os seus graus de liberdade. A quantidade de energia recebida por cada grau de liberdade depende apenas da temperatura do sistema, sendo dada por $kT/2$, na qual k é uma constante universal de informações relativas a cada partícula em prol de um conhecimento médio das propriedades do sistema. O objetivo central da mecânica estatística clássica é o de reobter as leis termodinâmicas, muitas vezes empíricas, com base no sólido e conhecido terreno das leis newtonianas.

versal chamada constante de Boltzmann. A título de ilustração, considere um gás ideal monoatômico, i.e., um gás formado por moléculas de apenas um átomo que viajam no espaço sem interagir entre si. Neste caso, cada átomo possui três graus de liberdade, na medida em que para especificarmos sua posição devemos fornecer três informações, dadas, por exemplo, pelas três coordenadas cartesianas (x, y, z) . Assim, se o gás possuir N átomos, ele terá $3N$ graus de liberdade e, portanto, sua energia será $3NkT/2$, pelo teorema da equipartição de energia.

O teorema da equipartição é o grande vilão de nossa história. Ele é uma consequência direta das leis da mecânica estatística, porém é incompatível com a emissão de radiação do corpo negro. De fato, conforme discutiremos na próxima seção, no mundo quântico a energia não é igualmente repartida. Para entendermos porque o teorema da equipartição conduz inequivocamente a um fracasso, comecemos perguntando como aplicá-lo no nosso caso. Repartir a energia igualmente entre os graus de liberdade do nosso sistema significa distribuir a mesma quantidade de energia para os osciladores materiais que o compõem. Veja novamente o gráfico 1.1. Na curva experimental percebemos que para baixas frequências a emissão é crescente, conforme o modelo clássico, porém a curva experimental atinge um máximo após o qual decresce até o zero de emissão. Ou seja, frequências muito altas não participam do jogo, elas não emitem. Contudo, em qualquer modelo clássico todas as frequências participam da brincadeira, já que todos os osciladores, de qualquer frequência, terão energia (pelo princípio da equipartição) e, portanto, teremos elétrons acelerados emitindo sua parcela. De alguma forma, no mundo quântico, se estabelece um corte, a partir do qual as grandes frequências não emitem⁹.

⁹Para piorar, conforme vemos na figura 1.1 as frequências altas são as que mais emitem no modelo clássico. Isto está ligado ao oscilador com uma alta frequência possuir uma alta aceleração, pois, conforme dissemos, a emissão de energia é uma consequência da aceleração das cargas. Em verdade, no modelo de Rayleigh-Jeans, a emissão cresce com o quadrado da frequência.

1.3 A discretização na emissão e a quebra do princípio de equipartição de energia

Como dissemos na primeira seção deste capítulo, reconhecer na solução de Planck a necessidade de uma emissão descontínua demandou enormes esforços da e debates na comunidade científica. Porém, no trabalho original de Planck figura pela primeira vez uma constante universal denotada lá por h . Ela é o selo da mecânica quântica e ao se deparar com sua presença em qualquer fórmula esteja certo de estar em terreno quântico. Esta constante atende hoje pelo nome de constante de Planck e seu valor é $h \approx 6.6 \times 10^{-34}$ J.s, ou seja, tem dimensão de energia \times tempo. A consequência mais fundamental do trabalho de Planck é a de que seus osciladores materiais apenas podem emitir energia em pacotes proporcionais a sua frequência, os chamados *quanta* de energia. A constante de proporcionalidade é h . Desta forma, dizemos que a energia emitida pelo oscilador material se dá em múltiplos deste pacote elementar $E = nh\nu$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Consideremos, inicialmente, as baixas frequências, quais sejam, as frequências para as quais o quantum de energia emitida, $h\nu$, é muito menor do que energia média que lhe caberia pelo princípio da equipartição de energia, i.e., $h\nu \ll kT$. Neste caso, o oscilador emite uma energia muito maior do que a contida em um quantum, logo há uma quantidade enorme de pequenos "grãos" de energia contidos na radiação emitida. Para todos os efeitos, portanto, é como se a emissão fosse contínua. Isto consubstancia o excelente acordo entre a previsão clássica e o experimento para baixas frequências. Por outro lado, o que se passa quando temos altas frequências, ou seja, $h\nu \gg kT$? Neste caso a realidade do laboratório se divorcia do raciocínio clássico, pois, com efeito, não se pode negligenciar o caráter não-nulo do quantum de emissão. Neste regime o oscilador só pode emitir energia em um pacote muito alto, tão alto que com a parca energia que lhe caberia pelo princípio de equipartição ele não pode mais patrocinar sua emissão e é forçado a deixar o jogo. Desta forma, altas frequências não emitem, em acordo com o experimento e justificado

teoricamente pela quantum de emissão proporcional à frequência, o que leva à quebra do princípio de equipartição e a necessidade radical de abandonar a física clássica. Apenas osciladores materiais de frequências baixas o suficientes são excitados e emitem energia. Os demais são "desligados".

1.4 O quantum de ação

Ao se reconhecer a necessidade de uma emissão descontínua de radiação, passou-se a buscar uma formulação mais fundamental que estivesse de acordo com tal mecanismo. Muitos problemas começaram imediatamente a surgir, provocando contundentes críticas ao trabalho de Planck. Não eram poucos os físicos de então a tratar seu procedimento como um mero artifício matemático, sem uma justificação física mais profunda. O modelo adotado por Planck para tratar o corpo negro era assaz simplificado: a ideia de imaginá-lo como composto por uma infinidade de osciladores materiais era um recurso teórico que ninguém jamais levou ao pé da letra. A única razão para se tê-lo considerado repousava, conforme dissemos, na lei de Kirchhoff, segundo a qual o campo de radiação em equilíbrio com a matéria é uma propriedade universal independente das propriedades específicas do material emissor de radiação. Portanto, um primeiro passo para se tornar a teoria de Planck mais rigorosa, seria compreender como modelar a emissão de algo mais realista do que um oscilador harmônico. Como generalizar os pacotes de energia dos osciladores harmônicos para um sistema qualquer? O oscilador harmônico possui uma propriedade basilar - sua frequência independe da amplitude do movimento. Desta forma, cada oscilador harmônico possui uma frequência bem definida que o caracteriza viabilizando a introdução, conforme fizemos, do quantum de energia como sendo proporcional a sua frequência. Por outro lado, em um sistema arbitrário isto não é verdade. Se considerarmos um movimento periódico qualquer, seu período, em geral, e portanto, sua frequência, depende da amplitude do movimento. Em outras palavras, a frequência deixa de ser uma propriedade do sistema e passa a depender do movimento realizado. Assim,

um sistema arbitrário não tem uma frequência bem definida e a prescrição de um quantum de energia proporcional à frequência perde o sentido.

Buscando formalizar sua teoria para sistemas mais gerais, Planck foi guiado pela dimensão da constante fundamental que ele havia introduzido. h tem dimensão de energia \times tempo - esta é a dimensão de uma das grandezas mais fundamentais e abstratas da física clássica, é a dimensão da ação. Planck generalizou sua teoria transformando o quantum de energia em um quantum de ação. Tal generalização teve no modelo atômico de Bohr e Sommerfeld seu capítulo mais frutífero, assunto que exploraremos oportunamente. Por ora, discutamos brevemente o conceito de ação. Em essência, o problema fundamental da mecânica pode ser colocado da seguinte forma: dadas as posições e velocidades iniciais de cada corpo pertencente a um dado sistema, qual será a trajetória seguida por cada corpo como função do tempo? A mecânica desenvolvida por Newton nos permite resolver este problema, ao menos em princípio, desde que conheçamos a força agindo sobre cada corpo. Neste caso, tudo o que devemos fazer é resolver a famosa equação diferencial de Newton, segundo a qual a aceleração, derivada segunda da posição, é igual ao quociente da força pela massa. No século XVIII, com o advento da mecânica analítica, se re-escreveu toda a mecânica sem se empregar o conceito de força. Para se resolver o problema fundamental da mecânica não era mais necessário resolver uma equação diferencial de segunda ordem. De forma equivalente, era possível resolver um problema de minimização: de todas as trajetórias possíveis que o sistema poderia seguir, ele seguirá aquela para a qual a ação assume seu valor mínimo. A ação é a integral no tempo da diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema, ou seja, tem dimensão de energia \times tempo, exatamente a dimensão da constante de Planck. Isto levou Planck a trocar seu quantum de energia por um quantum de ação. Por esta última, entenda-se que o sistema realizará apenas as trajetórias para as quais sua ação é um múltiplo inteiro de h . Esta regra reproduz o resultado original do quantum de energia no caso do oscilador harmônico e tem a vantagem de ser aplicável a sistemas mais gerais, embora tenha a limi-

tação de ser aplicável apenas a sistemas com apenas um grau de liberdade. Posteriormente, Sommerfeld e Wilson removeriam parcialmente esta restrição.

Este é o primeiro capítulo de uma das maiores sutilezas conceituais da teoria quântica. Afinal, o que é quantizar um sistema? Como transformar grandezas com as quais estamos familiarizados, como energia, posição, velocidade, etc. em entidades quânticas? Diversas respostas foram dadas a esta pergunta, a qual continua sendo debatida ainda hoje por físicos, matemáticos e filósofos e historiadores da ciência. Foge ao nosso propósito pormenorizar este detalhe. Voltemos às principais críticas sofridas pelo quantum de ação de Planck. A maior delas se refere ao caráter abstrato da ação clássica. Embora a quantização da emissão de energia seja algo completamente alheia a física clássica, pelo menos encontramos na energia um conceito mais concreto e experienciável do que a ação. Não há em física nenhuma lei de conservação da ação, algo que torna a própria ideia de quantizá-la algo muito estranho. De fato, pensemos em um exemplo mais comum e presente na física clássica: a quantização da carga elétrica. Dizemos em eletromagnetismo que todo corpo é formado por elétrons, neutrons e prótons, e a carga global adquirida pelo corpo depende do balanço entre as cargas elementares positivas, prótons, e as negativas, elétrons¹⁰. Em eletromagnetismo a carga total se conserva. A ideia da existência de um pacote de alguma coisa, nos induz a ideia de contar a quantidade de pacotes presentes e imaginar que a quantidade total se conserva. Esta imensa falta de intuição a respeito do que seria o quantum de ação constituiu uma das maiores razões para o total desconforto da comunidade científica com o quantum da ação. Tal desconforto permaneceu até Dirac providenciar um procedimento bem matemático, mas mais satisfatório, conhecido como processo de quantização canônica. Foge ao nosso propósito discuti-lo aqui.

Para encerrar este primeiro capítulo, vale mencionar que o quantum de ação preconizava já uma das maiores diferenças com relação a física clássica que culminaria anos mais tarde no princípio da incerteza de Heisenberg. Lembre que em praticamente qualquer li-

¹⁰Os quarks são dotados de uma fração da carga elementar, porém até o momento não foram observados sozinhos, apenas em grupos, perfazendo um múltiplo inteiro da carga elementar.

viro de mecânica clássica, desde o ensino médio até o mais elaborado tratado moderno, começa-se estudando a cinemática, i.e., a descrição matemática do movimento no espaço e no tempo, e, em seguida, estuda-se a dinâmica, i.e., como prever o movimento dos corpos segundo princípios físicos gerais. Há, contudo, neste procedimento uma hipótese muito sutil que em geral sequer é esboçada na física clássica. Tal hipótese é a de que é possível localizar um corpo no espaço e no tempo de forma independente de suas propriedades dinâmicas, de sua massa por exemplo. Passemos, agora, ao caso quântico. Como dissemos, a ação é a integral no tempo da diferença entre a energia cinética e da energia potencial. A energia cinética, por exemplo, é o produto de uma quantidade cinemática (o quadrado da velocidade), pela massa, um quantidade dinâmica. O mesmo vale para a energia potencial - no caso da energia elástica, por exemplo, temos o produto da constante elástica, quantidade dinâmica, pelo quadrado do alongamento da mola, grandeza cinemática. Ao estabelecermos o quantum de ação, tornamos inextricavelmente interdependentes as coordenadas geométricas espaciais e temporais cinemáticas dos fenômenos dinâmicos que ali queremos localizar. Esta profunda interconexão é uma marca essencial da quântica e nos aparecerá com mais clareza ao apresentarmos o princípio da incerteza.

Fazendo um breve sumário dos pontos essenciais, podemos dizer que para descrevermos corretamente a emissão de radiação de um corpo devemos discretizar sua emissão de energia. Caso estejamos lidando com osciladores harmônicos introduzimos o quantum de energia e dizemos que a emissão se dá em pacotes fundamentais de energia proporcional à frequência do oscilador. Para lidar com sistemas mais gerais, Planck introduziu o quantum da ação. Trataremos no próximo capítulo sobre a aplicação mais cara de tal princípio - o átomo de Bohr-Sommerfeld.

