



**INSTITUTO DE FÍSICA**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

*Pós-Graduação*

*Mestrado Profissional em Ensino de Física*

Tópicos de ótica

Física de materiais com índice de refração negativo

Antônio Carlos Fontes dos Santos

# Physics of negative refractive index materials

S Anantha Ramakrishna

# The negative index of refraction demystified

Martin W McCall<sup>1,4</sup>, Akhlesh Lakhtakia<sup>2</sup> and  
Werner S Weiglhofer<sup>3</sup>

# Photorealistic ray tracing aids understanding of metamaterials

Aaron Danner

---



## Photorealistic images of objects in effective negative-index materials

**Gunnar Dolling and Martin Wegener**

*Institut für Angewandte Physik and DFG-Center for Functional Nanostructures (CFN), Universität Karlsruhe (TH),  
Wolfgang-Gaede-Strasse 1, D-76128 Karlsruhe, Germany  
[Gunnar.Dolling@physik.uni-karlsruhe.de](mailto:Gunnar.Dolling@physik.uni-karlsruhe.de)*

**Stefan Linden**

*Institut für Nanotechnologie, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, Postfach 3640,  
D-76021 Karlsruhe, Germany*

**Christoph Hormann**

*Institut für Dynamik und Schwingungen, Universität Braunschweig, Schleinitzstrasse 20, D-38106 Braunschweig,  
Germany*

# LEMBRANDO..FASE E VELOCIDADE DE FASE

$$\psi(x,t) = A \text{ sen } (kx \pm \omega t + \varepsilon)$$

*Varição da fase com o tempo*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| = \omega$$

*Fase  $\varphi = kx \pm \omega t + \varepsilon$*

*Varição da fase com a posição*

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = k$$

*Constante de fase*

*fase constante*

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{dx}{dt} \pm \omega = 0$$

*velocidade de fase*

$$\frac{dx}{dt} = v = \pm \frac{\omega}{k}$$

# LEMBRANDO...VELOCIDADE DE GRUPO

*Em meios dispersivos a velocidade de fase depende do comprimento de onda .*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

*A moduladora, ou sinal, propaga-se a uma velocidade  $v_g$ , que pode ser superior, igual ou inferior à velocidade de fase da transportadora,  $v$*

*como*  $\omega = kv$

*então*  $v_g = v + k \frac{dv}{dk}$

*Em particular em meios não dispersivos em que  $v$  não depende de  $\lambda$ ,*

$$dv/dk = 0 \quad e \quad v_g = v$$

*Em meios dispersivos onde  $n = n(k)$ ,  $\omega = kv = kc/n$   
 $v_g$  pode ser escrito na forma:*

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}$$
$$v_g = v \left( 1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$$

**Are You  
Paying  
Attention?**

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}$$
$$v_g = v \left( 1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$$

Em meios óticos e em regimes de *dispersão normal*, o índice de refração aumenta com a frequência ( $dn/dk > 0$ ), logo  $v_g < v$ .

Podemos definir então um índice de refração de grupo,

$$n_g = c/v_g$$

A velocidade de grupo é frequentemente vista como a velocidade na qual a energia e a informação são transportadas na onda.



No entanto, se a onda está atravessando um meio absorvedor, isto nem sempre é verdade. Vários experimentos mostram que é possível que a velocidade de grupo de uma luz laser em certos materiais podem exceder a velocidade da luz no vácuo!



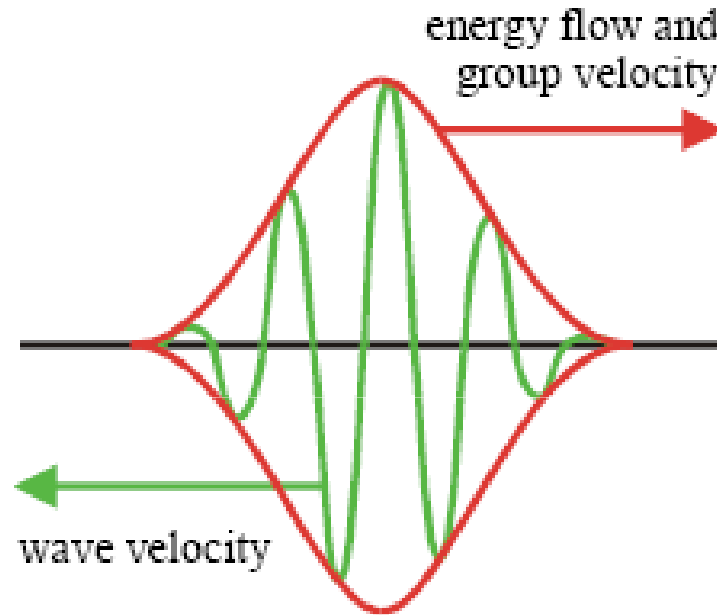
**Atenção!**

Mas a comunicação superluminal não é possível, pois a velocidade do sinal permanece menor do que a velocidade da luz. É possível também reduzir a velocidade de grupo da luz a zero, parando o pulso, ou ter uma velocidade de grupo negativa, parecendo que o pulso se propaga para trás.

Mas, em todos estes casos, os fótons continuam se propagando com a velocidade da luz no meio.



No caso em que  $n < 0$  :



Dispersão é uma característica primordial de metamateriais. Não levar este fato em conta leva a resultados sem sentido.

Na ausência de fontes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A troca do sentido do transporte de energia pode ser entendida como: trocar o sentido de  $\varepsilon$  e  $\mu$  é equivalente a trocar o sinal do campo magnético, mas manter o mesmo vetor de onda. As soluções ficam exatamente iguais ao sistema positivo.

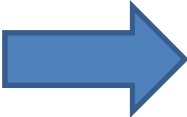
O índice de refração é definido como:

$$n = \frac{c}{v},$$

A partir das equações de Maxwell, obtemos:

$$n^2 = \epsilon\mu,$$

Para materiais corriqueiros, podemos tirar a raiz quadrada sem problemas. Embora fosse reconhecido que o índice de refração fosse complexo, para descrever a absorção pelo meio, e mesmo um tensor, em meios não isotrópicos, o sinal foi sempre tido como positivo, pelo menos até 1967, quando Veselago considerou materiais com índices de refração negativos.

$$n = \pm \sqrt{\epsilon\mu}$$


$$n = +\sqrt{\epsilon\mu}$$

Materiais ordinários

$$n = -\sqrt{\epsilon\mu}$$

Materiais com  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$

Causalidade força a escolha do sinal negativo

$$n = \pm \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{-\mu}{-\epsilon}}$$

A impedância é a mesma !


Podemos escrever

$$\mu = |\mu| \exp(i\pi)$$

$$\varepsilon = |\varepsilon| \exp(i\pi)$$

e

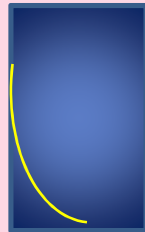
$$n = [|\varepsilon| |\mu| \exp(i2\pi)]^{1/2} = [|\varepsilon| |\mu|]^{1/2} [\exp(i2\pi)]^{1/2} = - [|\varepsilon| |\mu|]^{1/2}$$

$$n = \text{Re}(n) + i \text{Im}(n)$$


Na prática,  $\text{Im} > 0$  porque sempre há perda

$\epsilon < 0; \mu > 0$   
Muitos metais

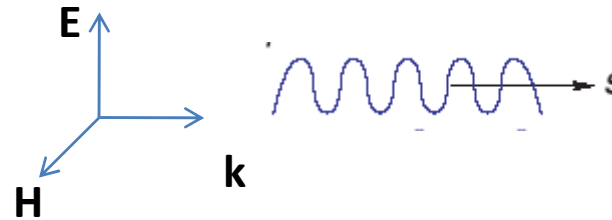
Onda evanescente



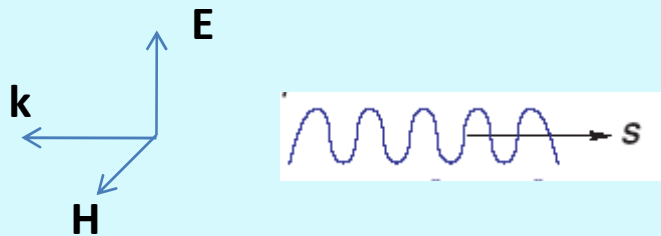
$\mu$

$\epsilon > 0; \mu > 0$   
Materiais ordinários  
'Right hand'

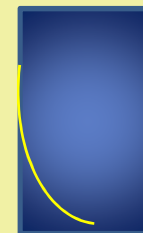
Permite propagação de onda



$\epsilon < 0; \mu < 0$   
Metamateriais artificiais  
'Left hand'  
(não confundir com moléculas quirais)  
Permite propagação de onda

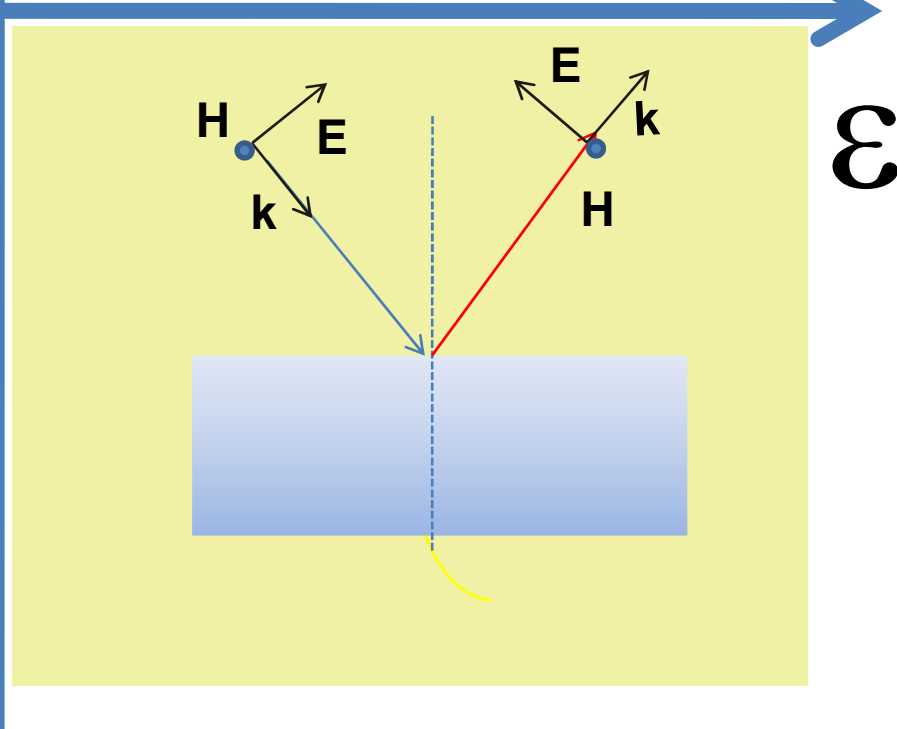
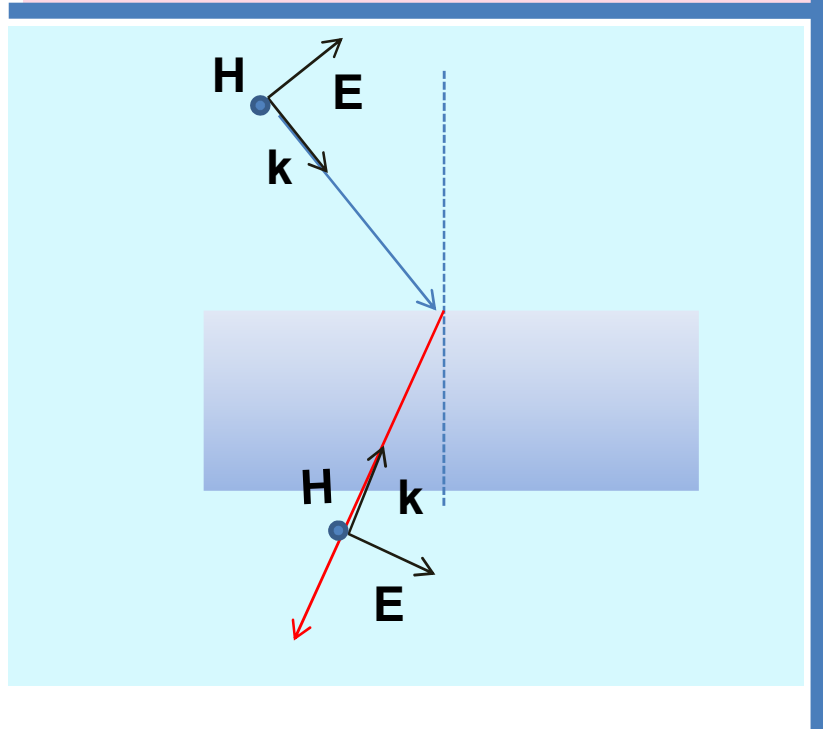
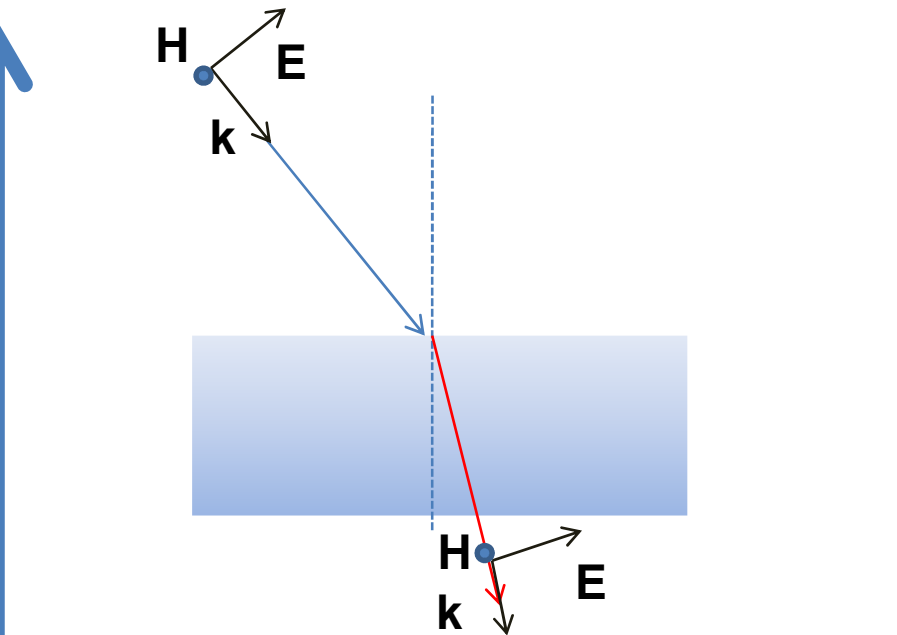
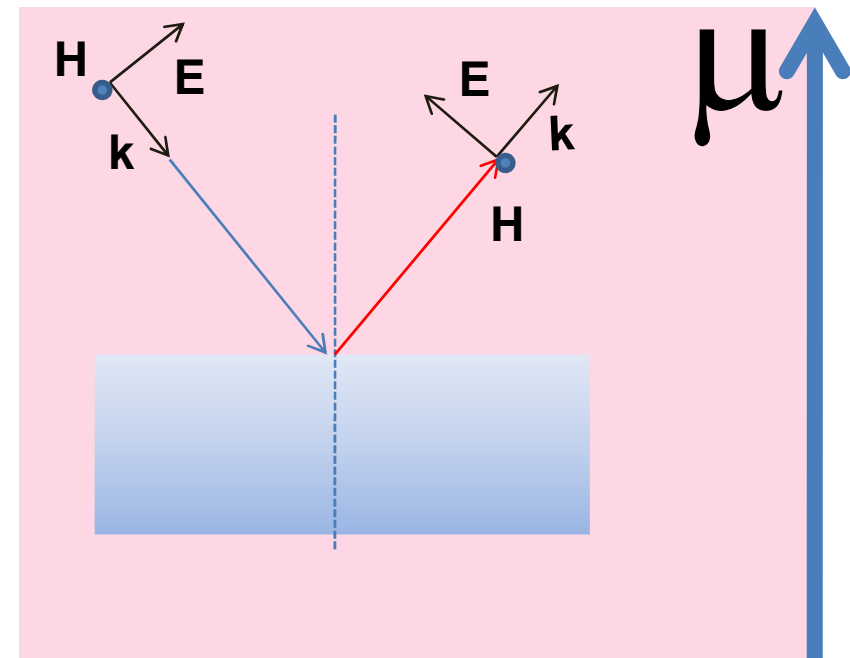


$\epsilon > 0; \mu < 0$   
Alguns materiais magnéticos naturais  
Onda evanescente



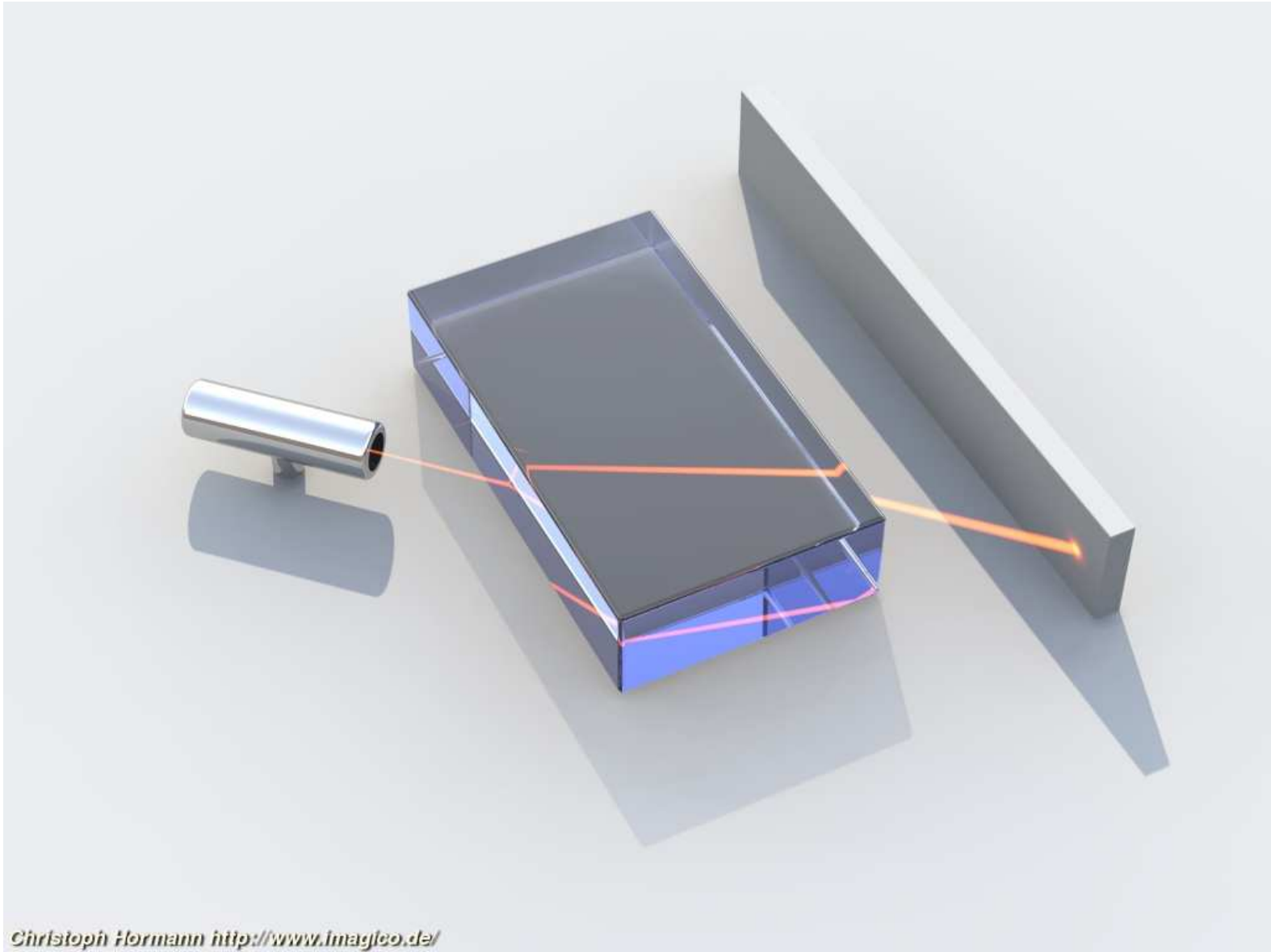
$\epsilon$



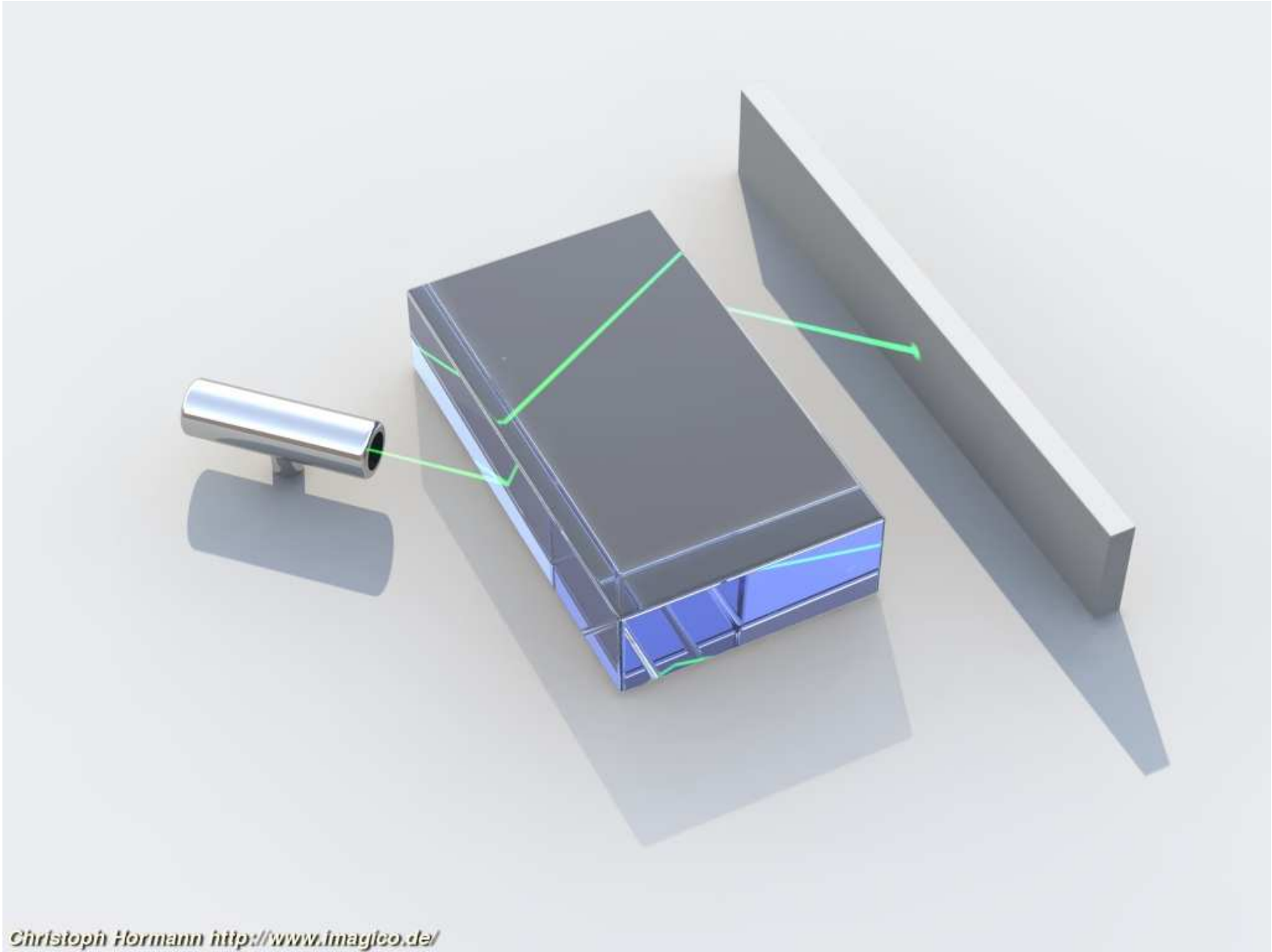


$\mu$

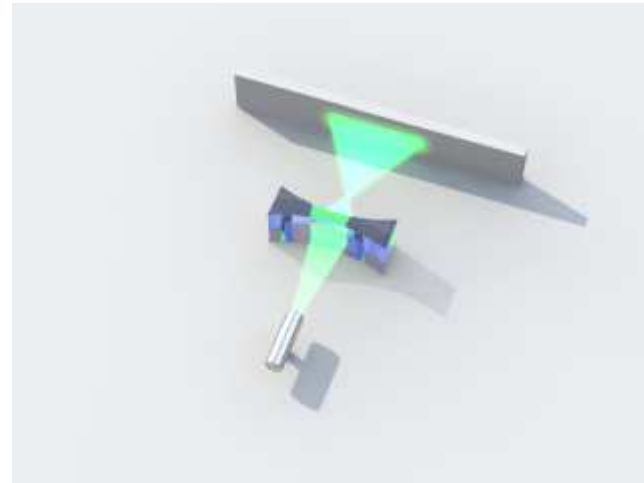
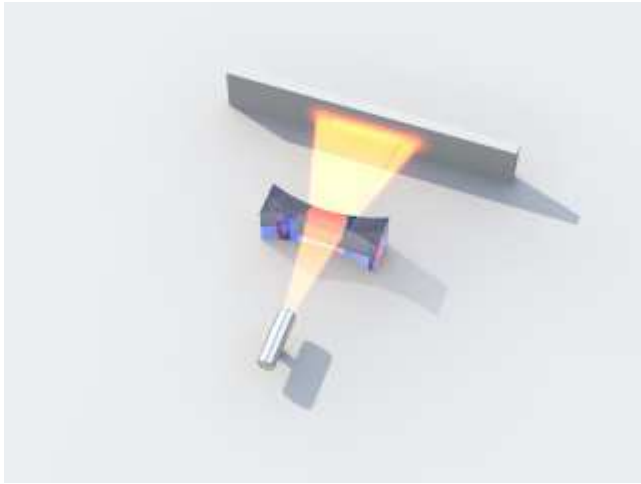
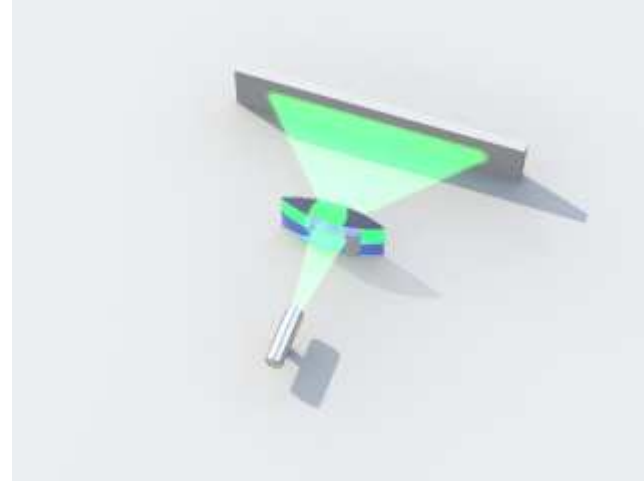
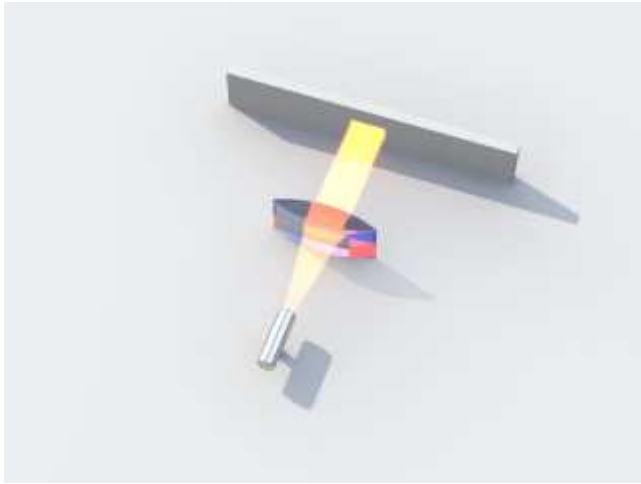
$\epsilon$



Christoph Hormann <http://www.imagico.de/>

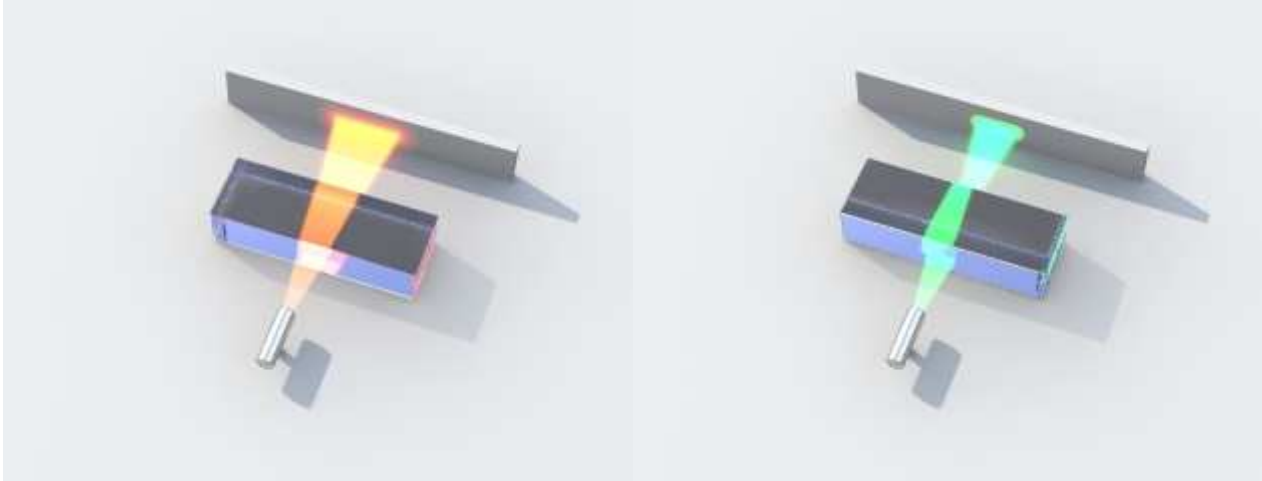


Christoph Hormann <http://www.imagleo.de/>



$n > 0$

$n < 0$



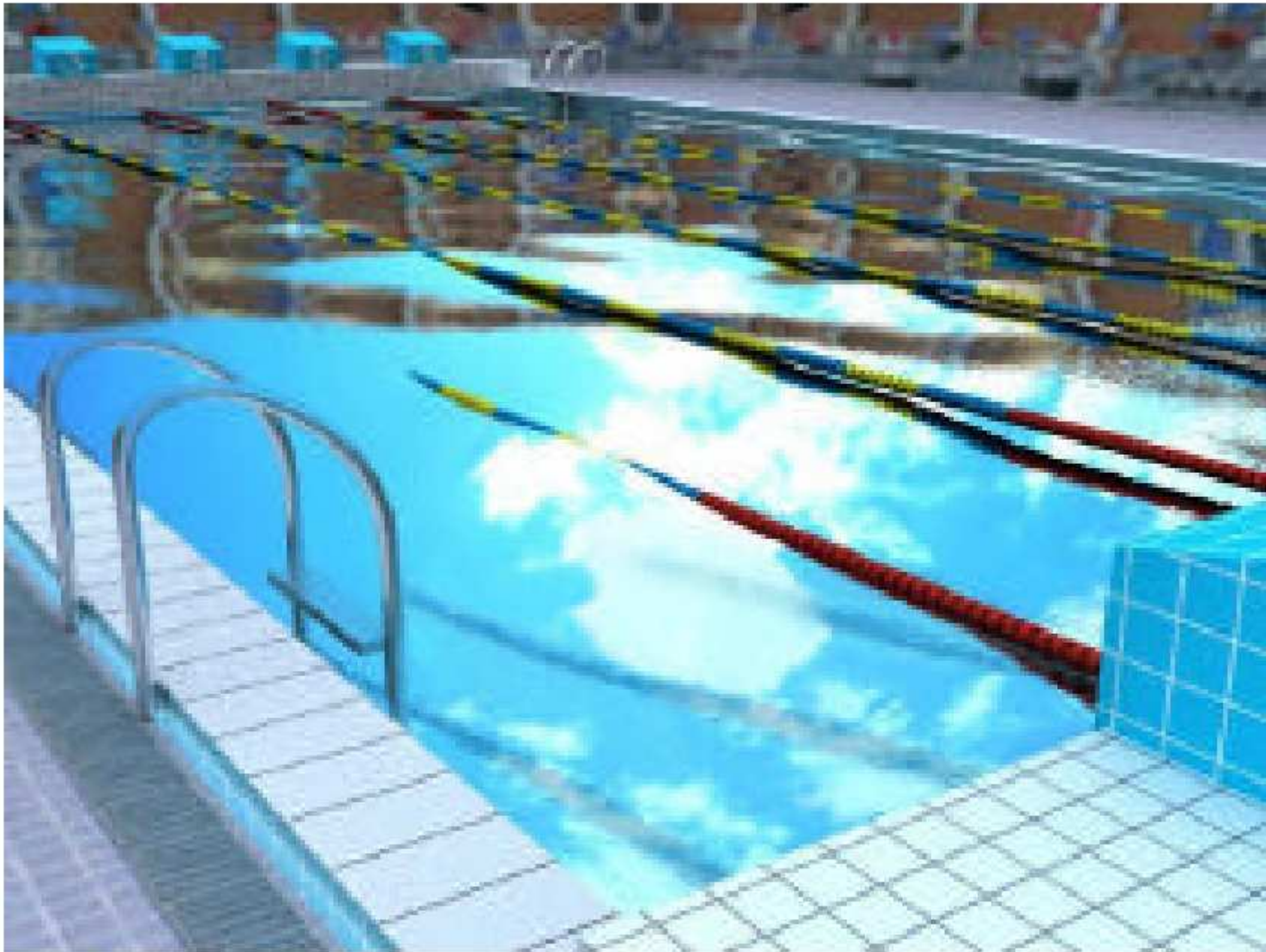
$n > 0$

$n < 0$





Água com  $n= 1,33$  (gerada por computação)

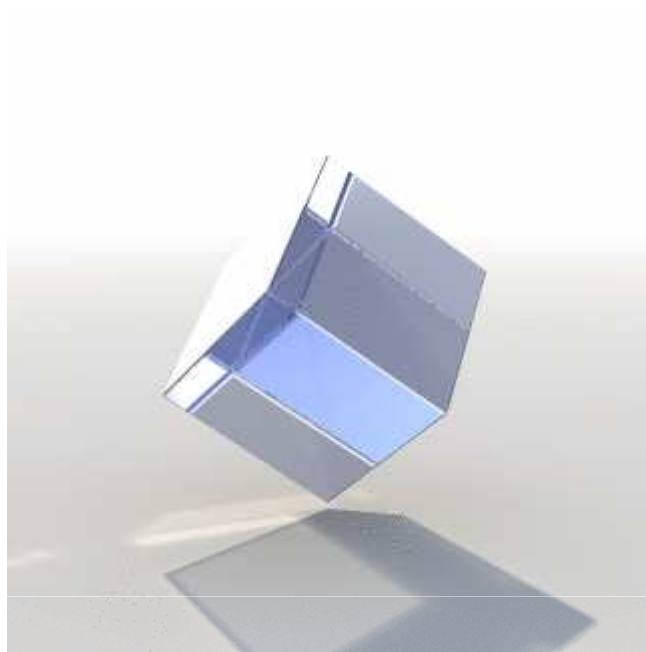
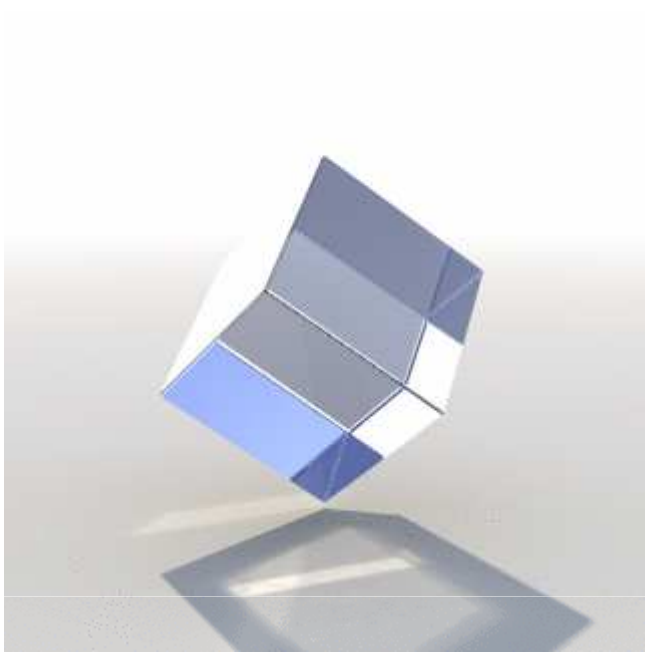


$n = 0,99$

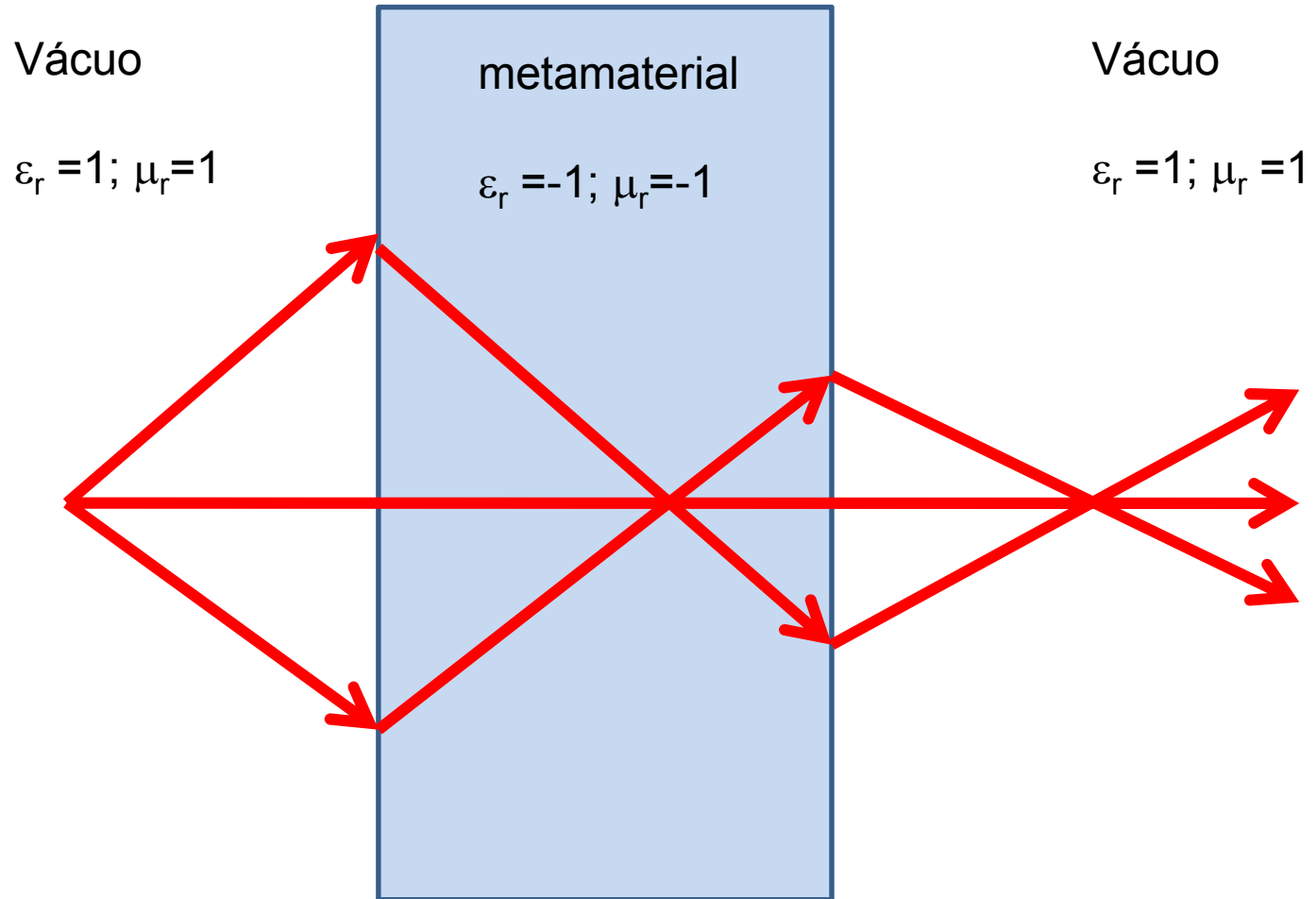




$n = -1.33$  ( o fundo parece estar acima da borda)



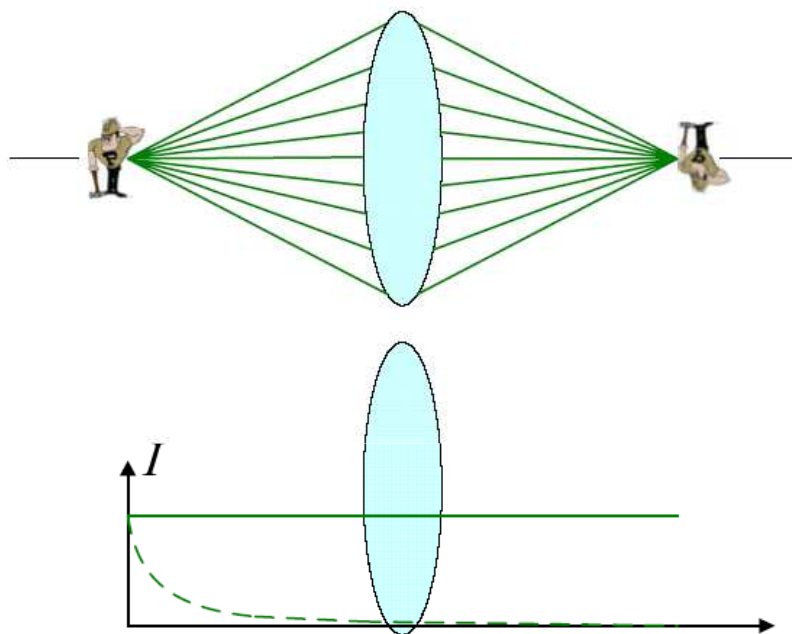
# Uma lente perfeita!



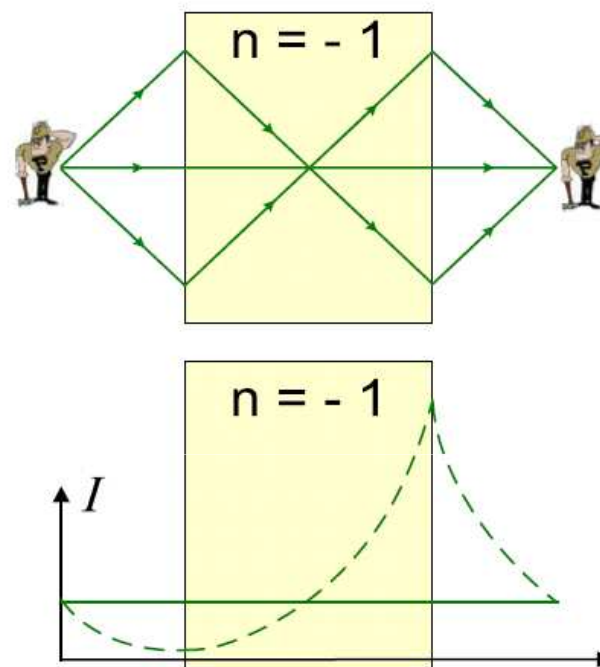
$$Z_{\text{vácuo}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega = Z_{\text{metamaterial}}$$

Não há reflexão!  
Sem aberração!

Lente convencional

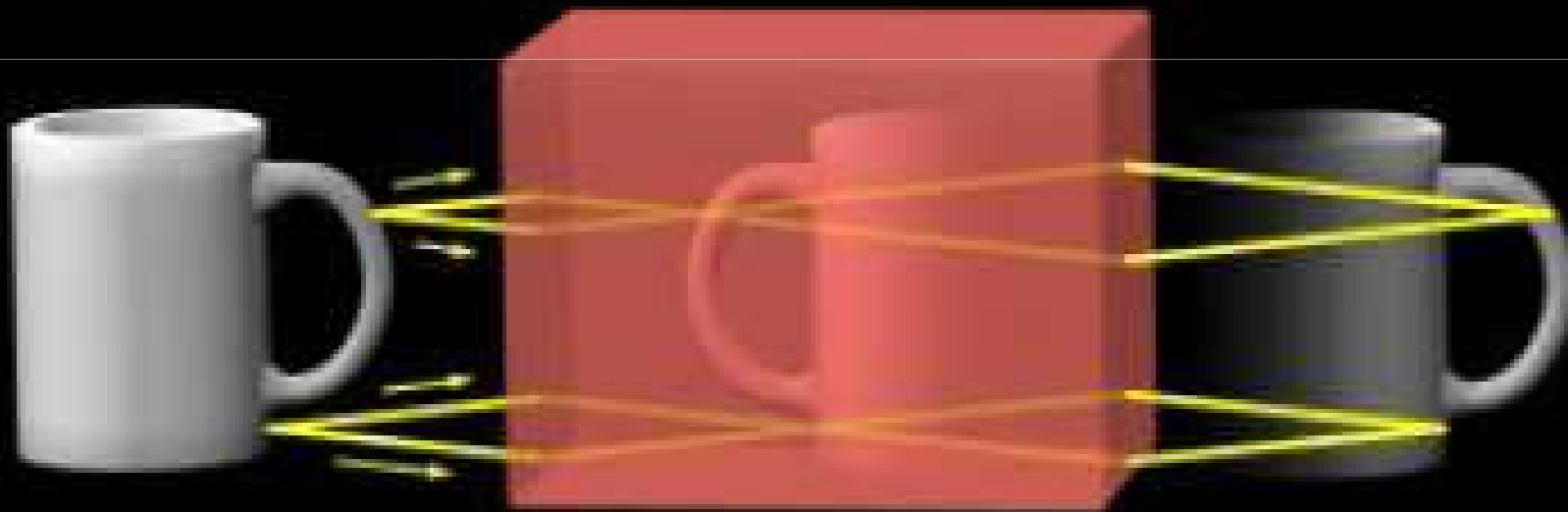


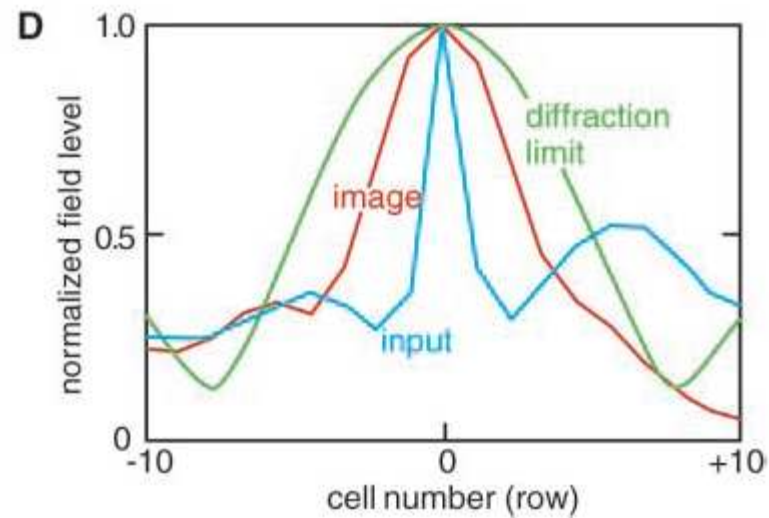
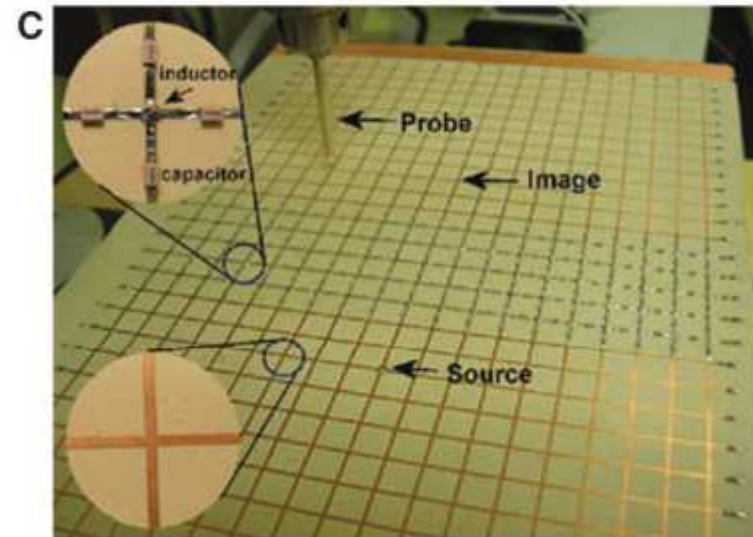
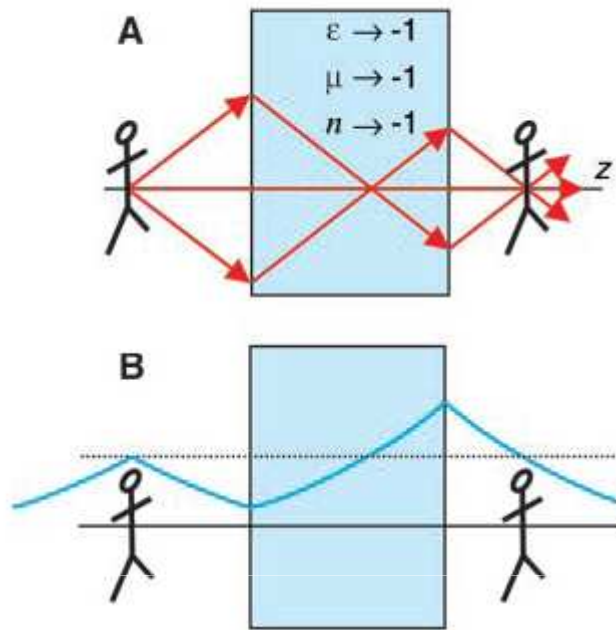
metamaterial



## THE SUPERLENS

A rectangular slab of negative-index material forms a superlens. Light (yellow lines) from an object (at left) is refracted at the surface of the lens and comes together again to form a reversed image inside the slab. The light is refracted again on leaving the slab, producing a second image (at right). For some metamaterials, the image even includes details finer than the wavelength of light used, which is impossible with positive-index lenses.

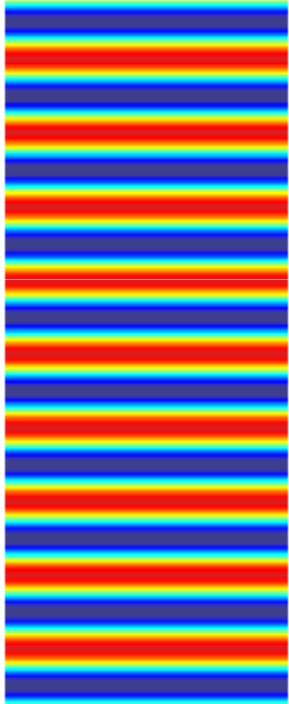
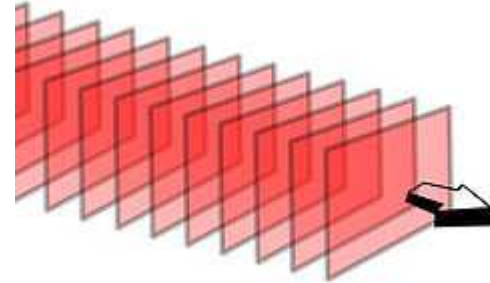




**Fig. 4.** Perfect lensing in action: A slab of negative material effectively removes an equal thickness of space for (A) the far field and (B) the near field, translating the object into a perfect image. (C) Microwave experiments by the Eleftheriades group (26) demonstrate that subwavelength focusing is possible, limited only by losses in the system. (D) Measured data are shown in red and compared to the perfect results shown in blue. Losses limit the resolution to less than perfect but better than the diffraction limit shown in green.

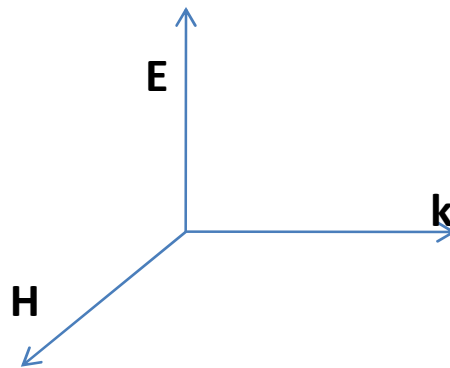
Considere as equações de Maxwell para uma onda plana

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$



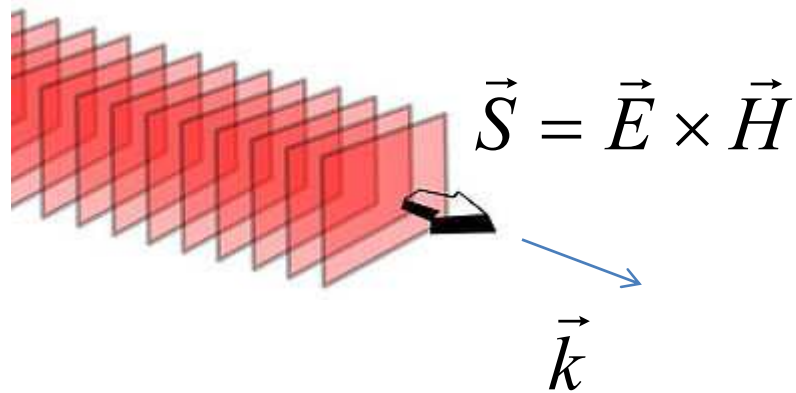
$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E},$$

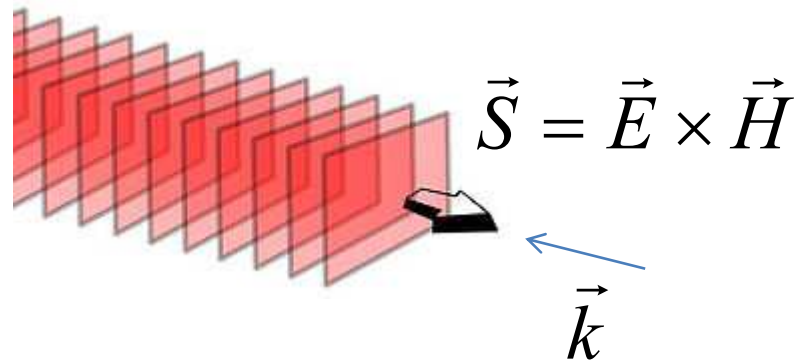


$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} = \frac{\omega}{v} \hat{n} = \frac{n\omega}{c} \hat{n}$$

Vetor unitário na direção  $\vec{E} \times \vec{H}$



$n > 0$

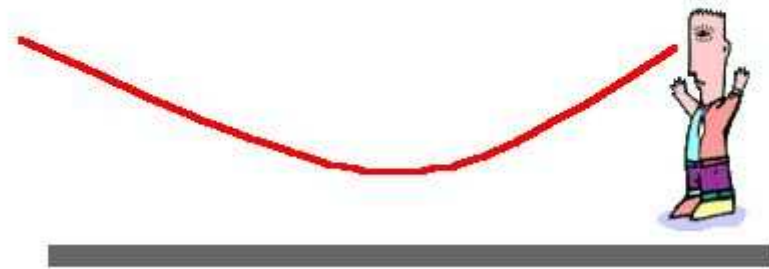


$n < 0$



E como fica o Princípio de Fermat ?

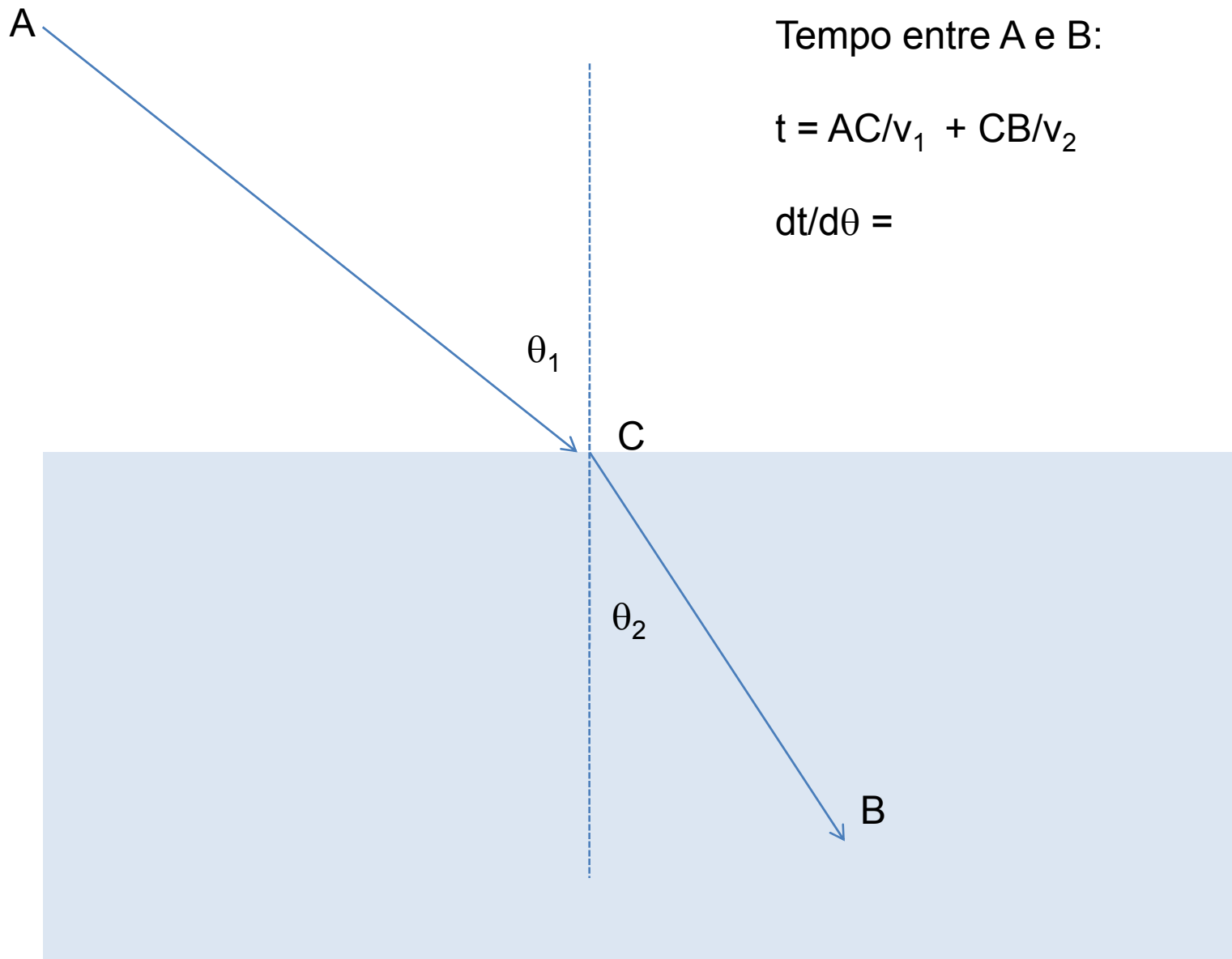
*O caminho percorrido pela luz para ir de um ponto a outro é o de duração mínima.*



Fata Morgana (miragem devido a inversão de temperatura)



Green flash



Tempo entre A e B:

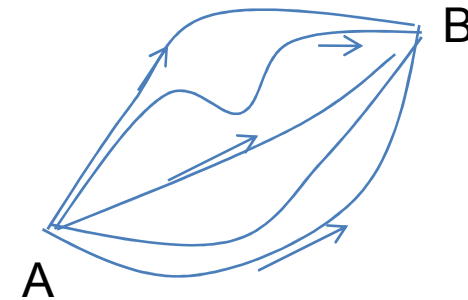
$$t = AC/v_1 + CB/v_2$$

$$dt/d\theta =$$

## Princípio de Fermat ao revés

O caminho ótico é dado por (OPL):

$$OPL = \int_A^B n(\vec{r}) ds$$



O tempo gasto pela luz para ir de A até B é proporcional ao caminho ótico. O princípio da mínima ação afirma que a trajetória mais provável é a fase estacionária, que corresponde ao extremo na derivada espacial do tempo total de trajetória de todas as trajetórias possíveis.

$$\delta \int_A^B n(\vec{r}) ds = 0$$

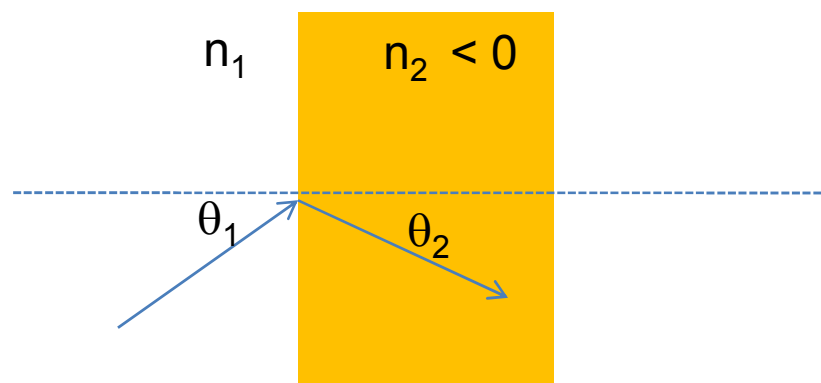
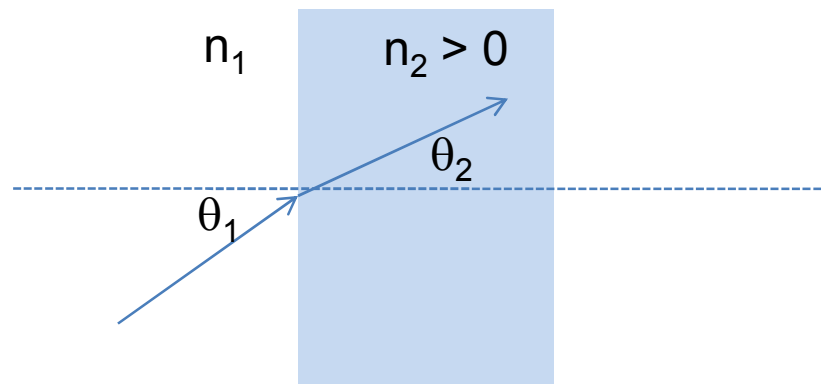
Este extremo poderia ser um máximo, um mínimo ou um ponto de inflexão. O princípio de Fermat afirma que é um mínimo.



Com  $n_2 < 0$ , a segunda derivada muda de sinal, apontando para uma conclusão não intuitiva de que temos um máximo e não um mínimo em tempo.

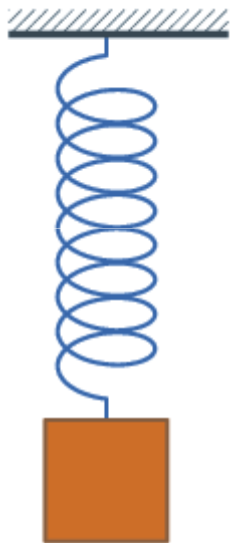
Metamateriais são causais em energia mas não em tempo!

O princípio de Fermat precisa ser reformulado!



# Materiais dielétricos negativos ( $\epsilon < 0$ )

Metais e plasmons em frequências óticas:



$$m\ddot{r} + m\gamma\dot{r} = -eE \exp(-i\omega_0 t),$$

Onda incidente

amortecimento

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\mathbf{E} = -n\mathbf{e}\mathbf{r} = -\frac{ne^2/m\mathbf{E}}{\omega(\omega + i\gamma)},$$



Polarização por unidade de volume

$$\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$$

Frequência de plasma

$$\varepsilon_{metal} = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$$

# Limites em ótica

Física atômica

$d \rightarrow$  dimensão do objeto



Descrição efetiva do meio  
Através de  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $n$

Ótica física

Ótica geométrica

$d \ll \lambda$

$d \sim \lambda$

$d \gg \lambda$

$d/\lambda \rightarrow \infty$

Ex: metamateriais,  
Meios anisotrópicos,  
Birrefringência,

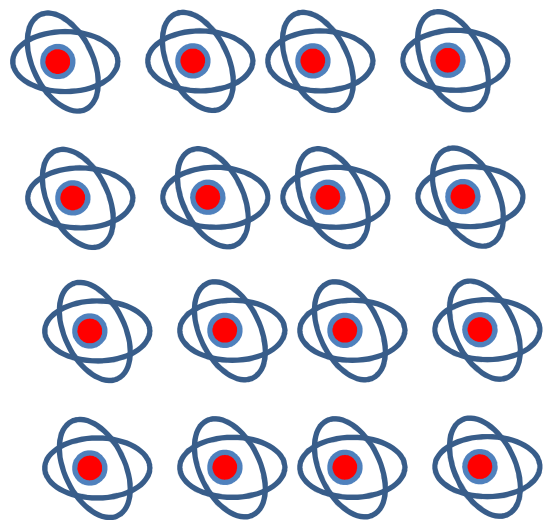
Interferência, difração,...

Lentes, sombras, etc..

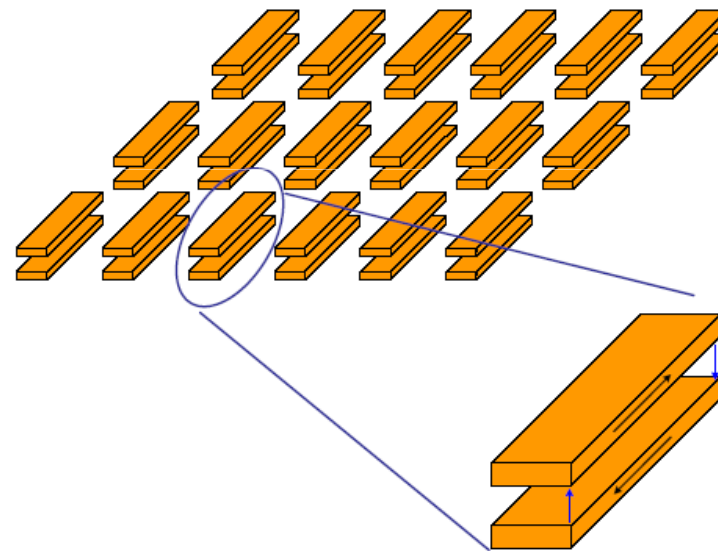


Um metamaterial é um arranjo de elementos de forma a ter propriedades eletromagnéticas não usuais.

μετα = meta = além

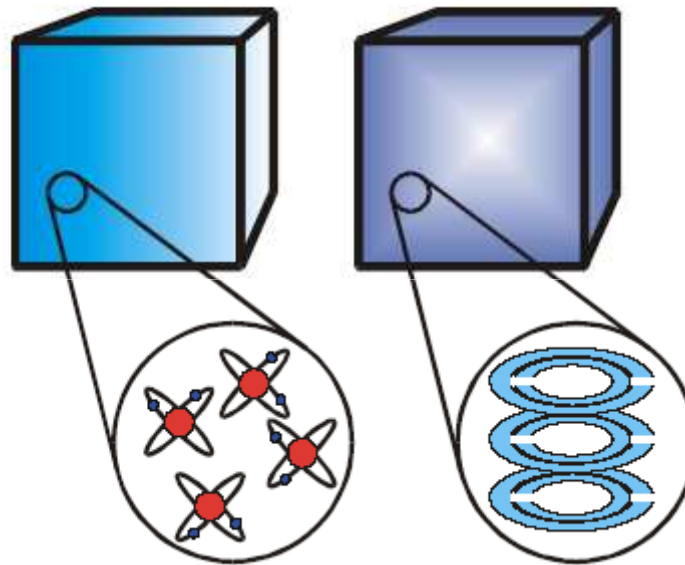


Material natural com seus átomos



Metamaterial com seus “átomos” artificiais

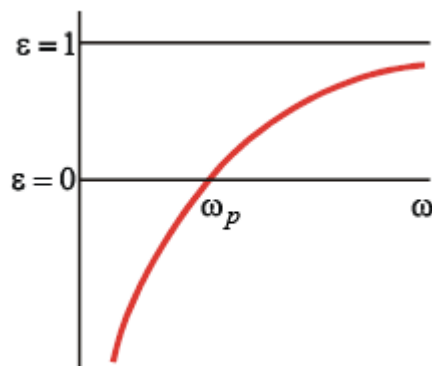
Numa escala de comprimento muito maior do que a separação entre átomos, tudo o que precisamos saber sobre o sistema é dado por  $\epsilon$  e  $\mu$ .



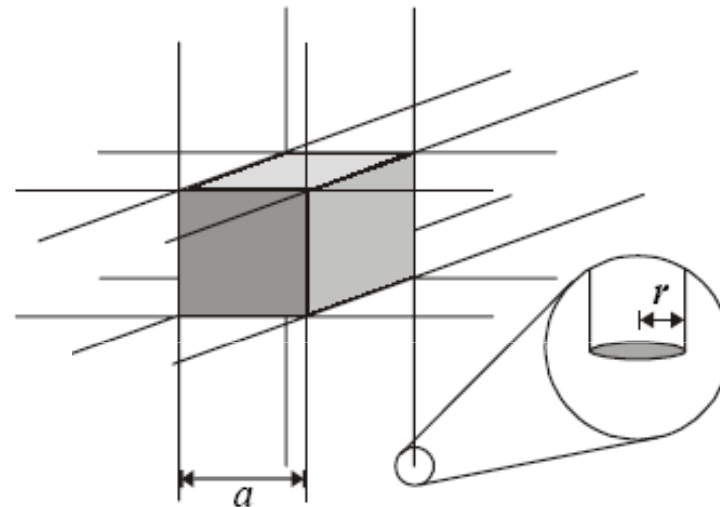
O mesmo vale para metamateriais, em uma escala muito maior do que o tamanho das unidades constituintes, as propriedades são determinadas por  $\epsilon_{\text{eff}}$  e  $\mu_{\text{eff}}$ . Isto significa que o tamanho das unidades deve ser muito menor do que o comprimento de onda da radiação.

Metamaterial com  $\epsilon < 0$  : uma estrutura periódica composta de uma infinidade de fios finos arranjados em uma rede cúbica imita a resposta de um plasma. Um plasma é um gás de partículas carregadas, assim como em um metal onde as partículas são os elétrons livres.

$$\epsilon_{metal} = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$$



$$\omega_p = ne^2 / \epsilon_0 m$$

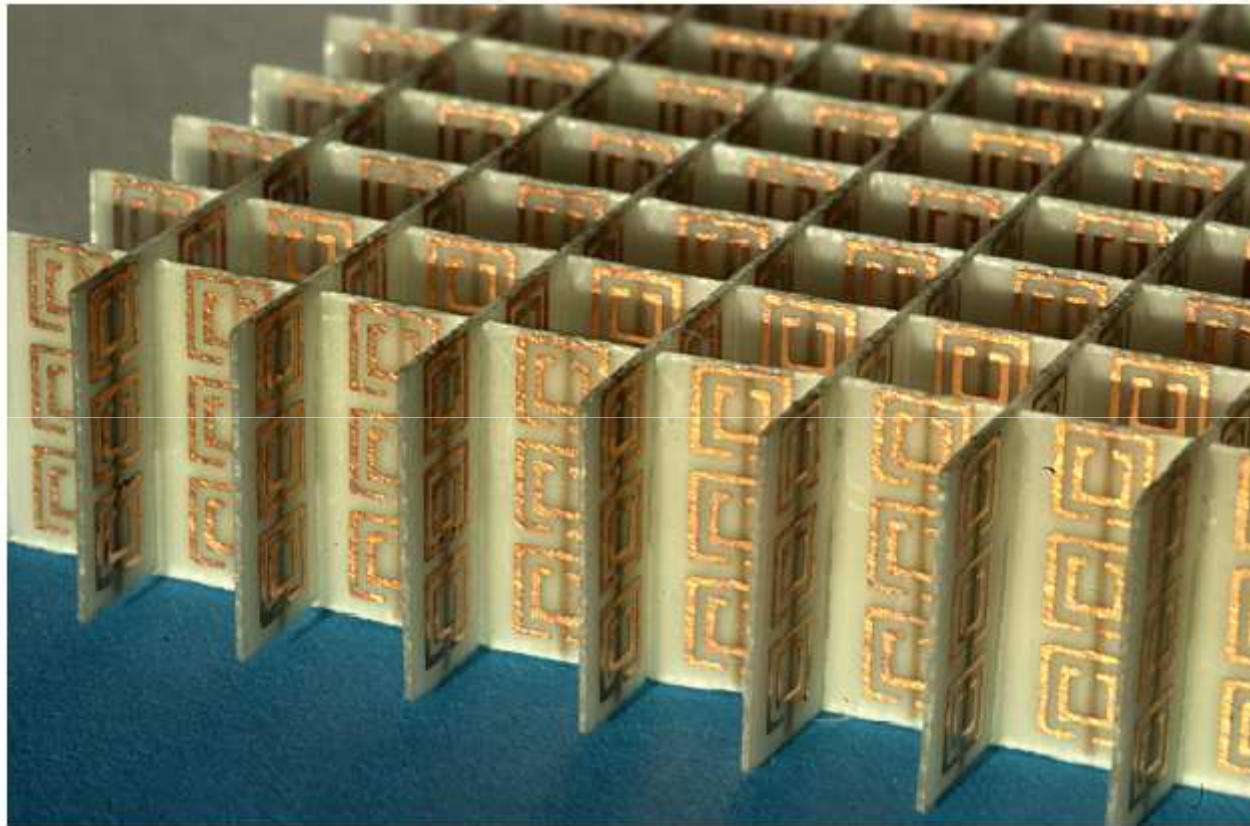


$r \sim 10 \mu\text{m}$   
 $a \sim \text{mm}$   
 $\omega_p \sim \text{GHz}$

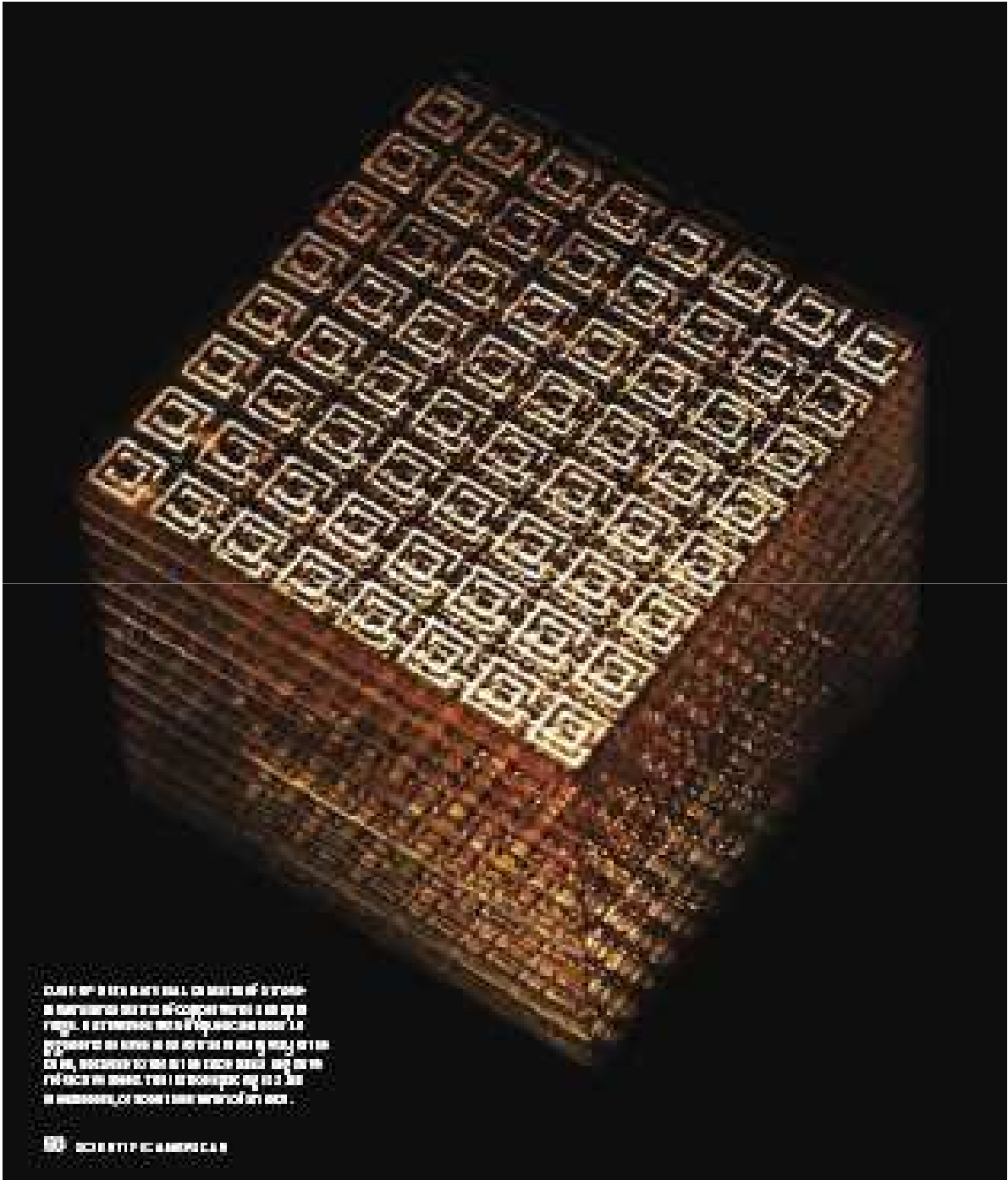
$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c^2}{a^2 \ln(a/r)}$$

$$n_{eff} = n\pi r^2 / a^2, \quad m_{eff} = \ln(a/r) \mu_0 e^2 \pi r^2 n / 2\pi$$

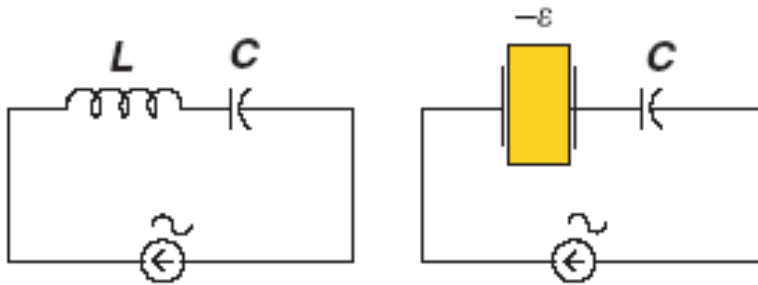
## Exemplo de metamaterial



t UCSD by David Smith.



QUESTO È UN LIBRO CHE HA LA FORMA DI UN CUBO  
E IL CONTENUTO È UNO DEI PIÙ IMPORTANTI  
DELLA LETTERATURA DEL SEICENTO. IL LIBRO  
È UNO DEI PIÙ IMPORTANTI DELLA LETTERATURA  
DEL SEICENTO. IL LIBRO È UNO DEI PIÙ  
IMPORTANTI DELLA LETTERATURA DEL SEICENTO.  
IL LIBRO È UNO DEI PIÙ IMPORTANTI DELLA  
LETTERATURA DEL SEICENTO. IL LIBRO È  
UNO DEI PIÙ IMPORTANTI DELLA LETTERATURA  
DEL SEICENTO. IL LIBRO È UNO DEI PIÙ  
IMPORTANTI DELLA LETTERATURA DEL SEICENTO.



**Figure 3.** A capacitor and an inductor form a resonant circuit that can oscillate at  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . A capacitor filled with a negative dielectric has negative capacitance, acts as an inductor and can resonate with another usual capacitor.

## Taça de Licurgo



Feito em vidro (séc. IV DC), mostra o rei Licurgo sendo arrastado para o submundo.

Quando iluminado por dentro, apresenta um vermelho brilhante. Os romanos adicionavam pequenos fragmentos de metal ao vidro para fazê-lo cheio de cor. Mas poucos itens apresentam esta mudança de cor.

Microscopia eletrônica revela nanopartículas de ouro com resposta em color diferente do ouro no material (bulk).



Primeiro? Metamaterial (feito em Roma) com nanopartículas de ouro.

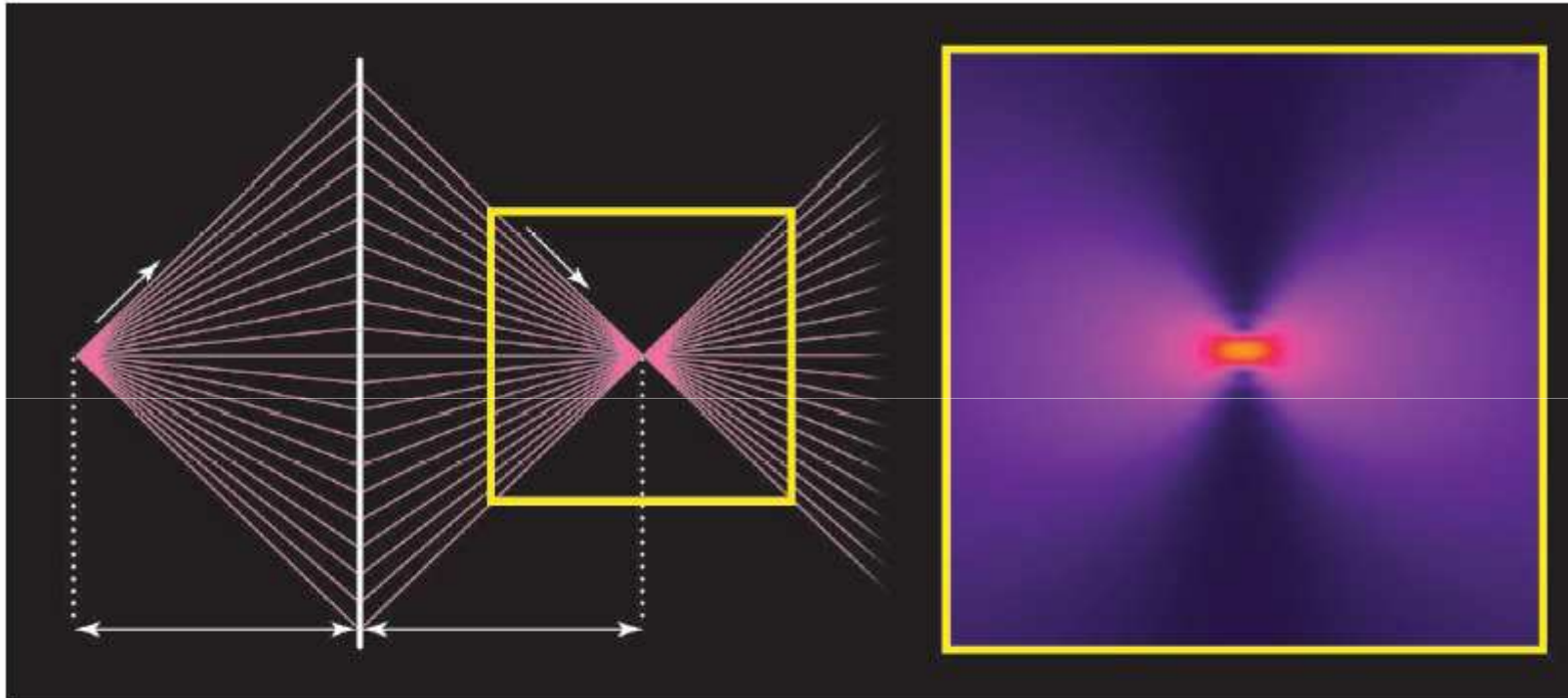


- Light incident on a metal sets up a sinusoidally varying electric field
- The electron gas around the metal atoms oscillates with the field
- This sets up a *polarization field* which depends on the frequency of the light
- Dielectric constant can be calculated:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

# Negative Refraction for Electrons?

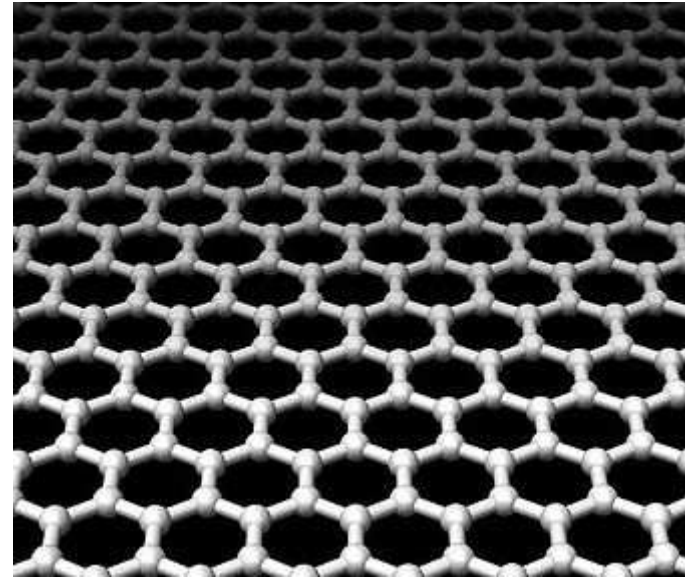
J. B. Pendry



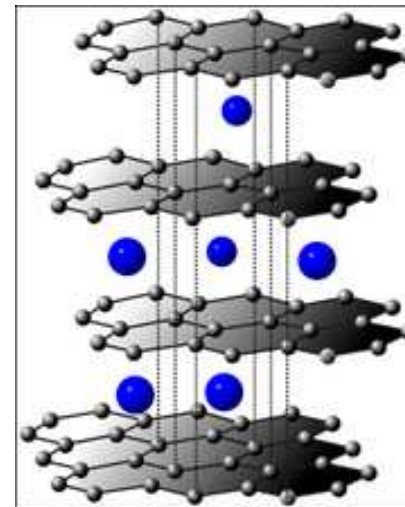
**Focusing electrons.** (Left) Veselago's lens: A negative refractive index medium ( $n = -1$ ) bends light to a negative angle relative to the surface normal. Light formerly diverging from a point source in the object plane is set in reverse and converges back to a point. (Right) Computer simulation of electron charge density on graphene showing similar focusing. [Adapted from (4)]

Pode ser alcançado com uma monocamada de grafite (grafeno)

No grafite, os átomos de carbono estão arranjados como folhas de hexágonos planos, cada átomo está ligado por três ligações aos seus vizinhos. A ligação entre camadas é fraca, de modo que o grafite é facilmente cisalhado, o que o faz um ótimo lubrificante.



O grafeno é uma monocamada de grafite.



Um pulso de elétrons na banda de valência do grafeno, a velocidade de grupo será antiparalela ao vetor de onda  $\mathbf{k}$

# Invisibilidade

Pode-se controlar e dirigir o campo eletromagnético: uma lente de vidro em uma câmera produz uma imagem, uma gaiola de Faraday blinda seu interior de campos externos. Em materiais homogêneos, o design ótico é uma questão de escolha da interface entre dois materiais. Por exemplo, uma lente é otimizada alterando sua forma de modo a minimizar aberrações.

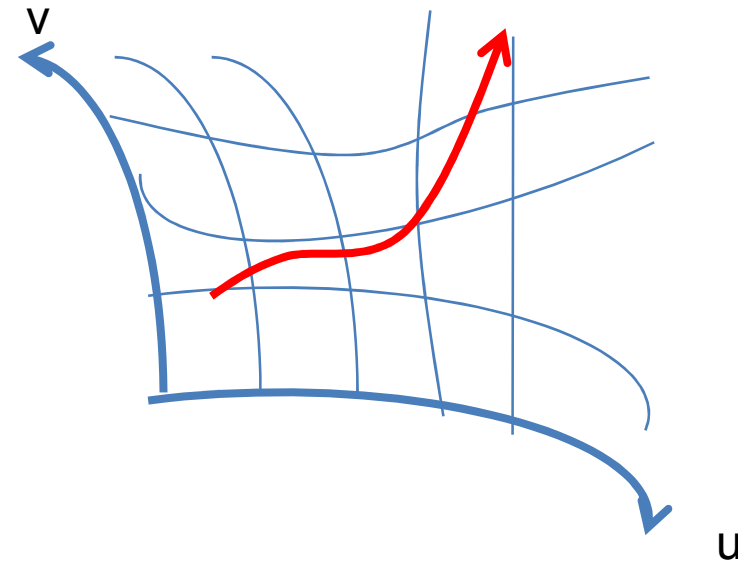
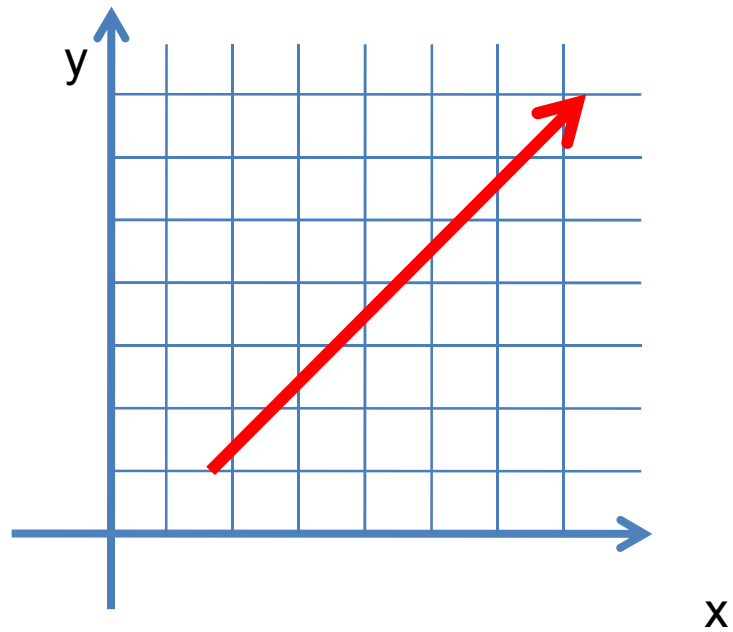
No caso de materiais eletricamente não homogêneos oferecem uma alternativa diferente de controlar a luz: a introdução de gradientes específicos no índice de refração de um material pode ser usado para criar lentes e outros elementos óticos.



Foto do homem invisível

As propriedades óticas dos metamateriais deve-se aos detalhes da sua estrutura no nível microscópico ( $d \ll \lambda$ ) ao invés da sua composição química.

Pode-se produzir propriedades difíceis ou impossíveis de se encontrar de forma natural.

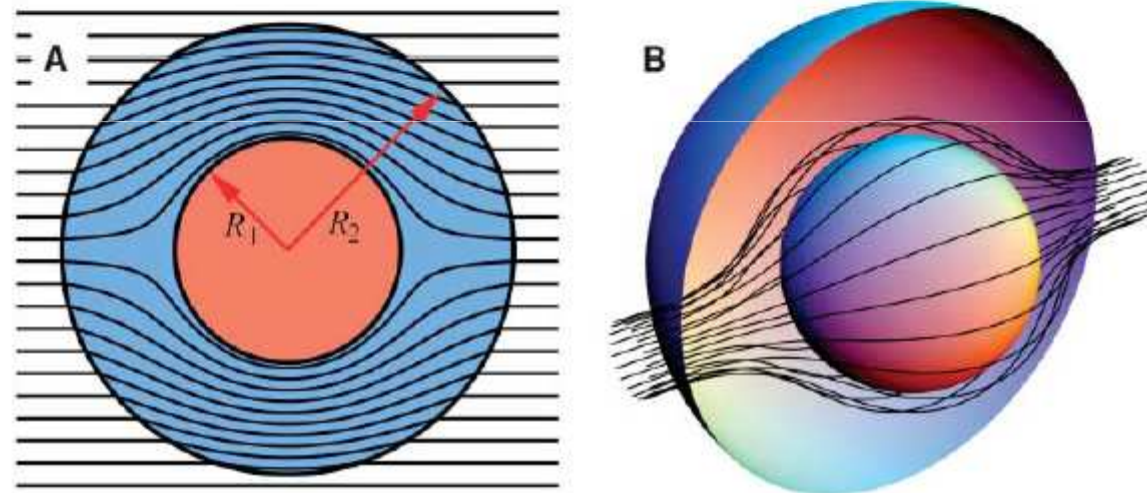


Imagine que o sistema está imerso em um meio elástico que pode ser puxado, esticado conforme desejarmos.

A distorção pode ser vista como uma transformação de coordenadas:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

Suponha que queiramos esconder um objeto qualquer em um dado volume do espaço; observadores externos não sabem que algo foi escondido deles. Nosso plano é camuflar o objeto com um metamaterial cuja função é defletir os raios que atingiriam o objeto, guiá-los em torno do objeto, depois deixá-los seguir a sua trajetória original.



**Fig. 2.** A ray-tracing program has been used to calculate ray trajectories in the cloak, assuming that  $R_2 \gg \lambda$ . The rays essentially follow the Poynting vector. **(A)** A two-dimensional (2D) cross section of rays striking our system, diverted within the annulus of cloaking material contained within  $R_1 < r < R_2$  to emerge on the far side undeviated from their original course. **(B)** A 3D view of the same process.



O que acontece com as equações de Maxwell neste novo sistema de coordenadas ?

As equações têm exatamente a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas, mas o índice de refração ( $\epsilon$  e  $\mu$ ) assumem uma nova forma.

$$\vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\epsilon}' = \begin{vmatrix} \epsilon_{uu} & \epsilon_{uv} & \epsilon_{uw} \\ \epsilon_{vu} & \epsilon_{vv} & \epsilon_{vw} \\ \epsilon_{wu} & \epsilon_{wv} & \epsilon_{ww} \end{vmatrix}$$

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{D}' = \vec{\epsilon}' \vec{E}'$$

Nenhuma radiação pode entrar e nenhuma radiação pode sair do volume.  
Um observador conclui que o volume está vazio!



Escolhemos que o objeto a ser escondido seja uma esfera de raio  $R_1$  e a região camuflada  $R_1 < r < R_2$ .

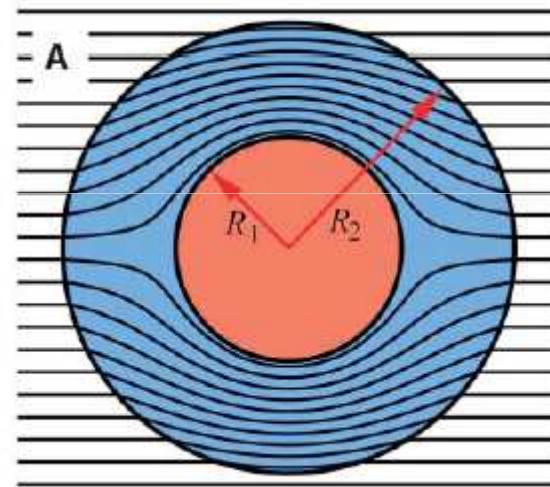
A transformação que leva ao resultado desejado pega todos os campos na região  $r < R_2$  e os comprime na região  $R_1 < r < R_2$ .

Ou seja,

$$r' = R_1 + r(R_2 - R_1)/R_2$$

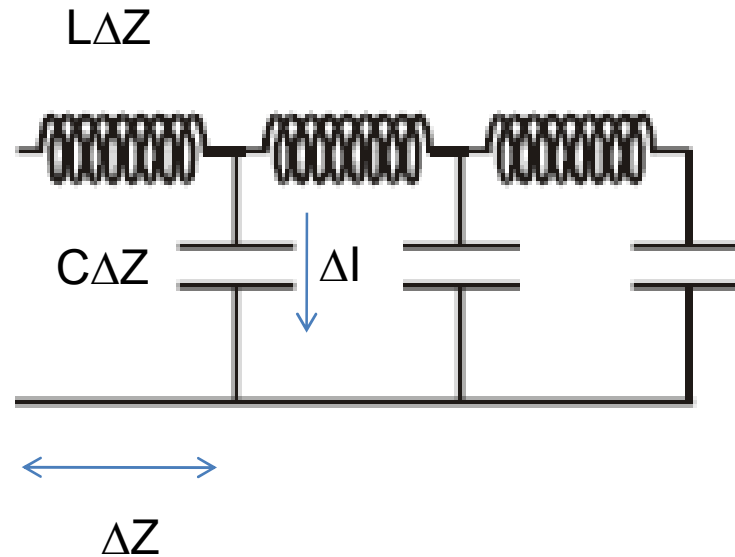
$$\theta' = \theta$$

$$\varphi' = \varphi$$



$L \rightarrow$  indutância por unidade de comprimento;

$C \rightarrow$  capacitância por unidade de comprimento;



Queda de tensão em um indutor:  $V = -Ldi/dt$

Corrente através do capacitor:  $q = CV \rightarrow i = CdV/dt$

$$\Delta V = -L \Delta I / \Delta t$$

$$\Delta I = -C \Delta V / \Delta t$$

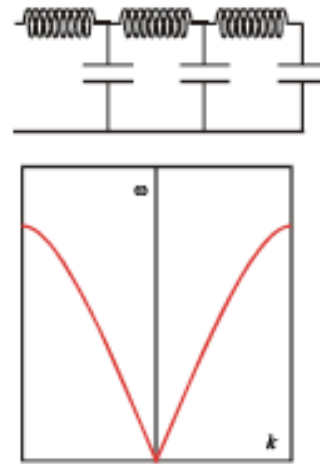


Figure 12. Top: in a conventional waveguide the wires have an inductive character and are shunted by the capacitance acting between them. Below: schematic dispersion for this transmission line. In this structure waves travel with a *positive* group velocity characteristic of positive refraction.

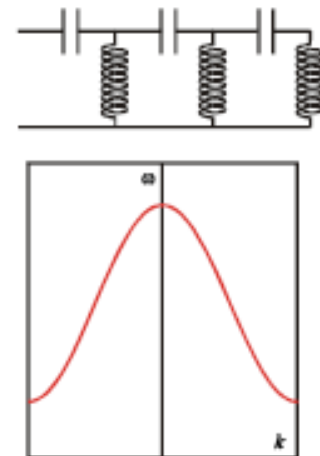
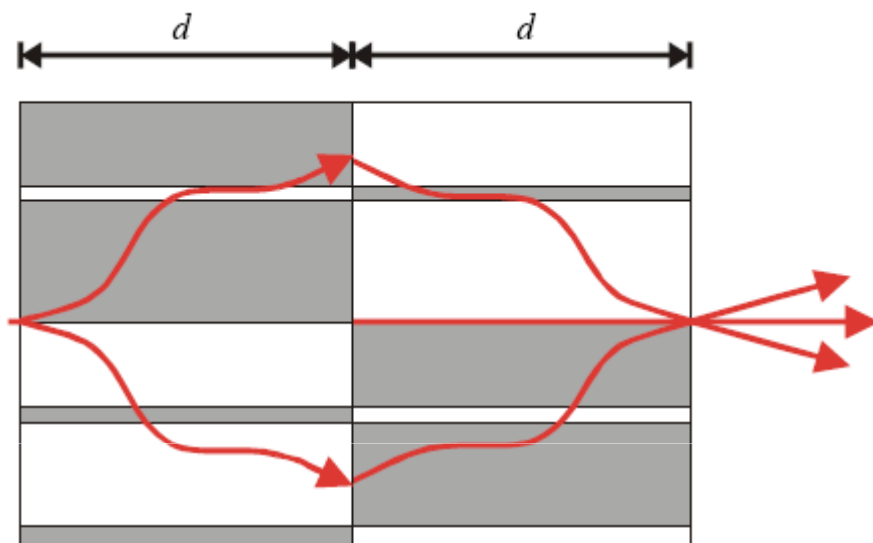


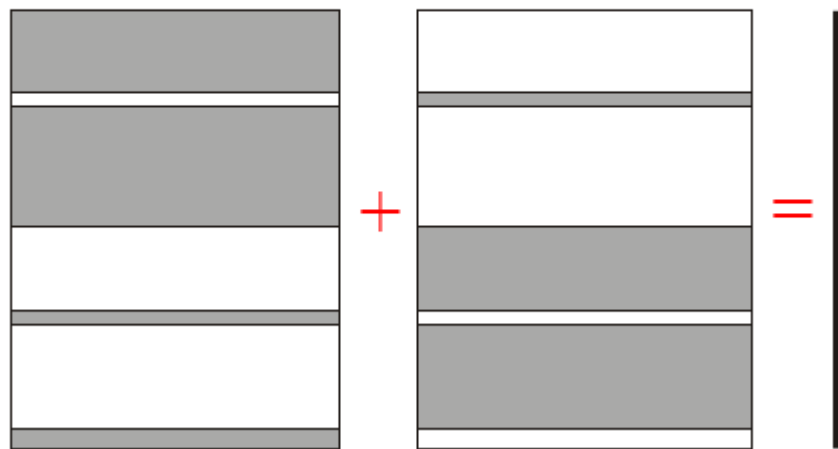
Figure 13. Top: in an inverted waveguide the wires have capacitive character and are shunted by inductance acting between them. Below: schematic dispersion for this transmission line. In this structure waves travel with a *negative* group velocity characteristic of negative refraction.

# Antimatéria ótica

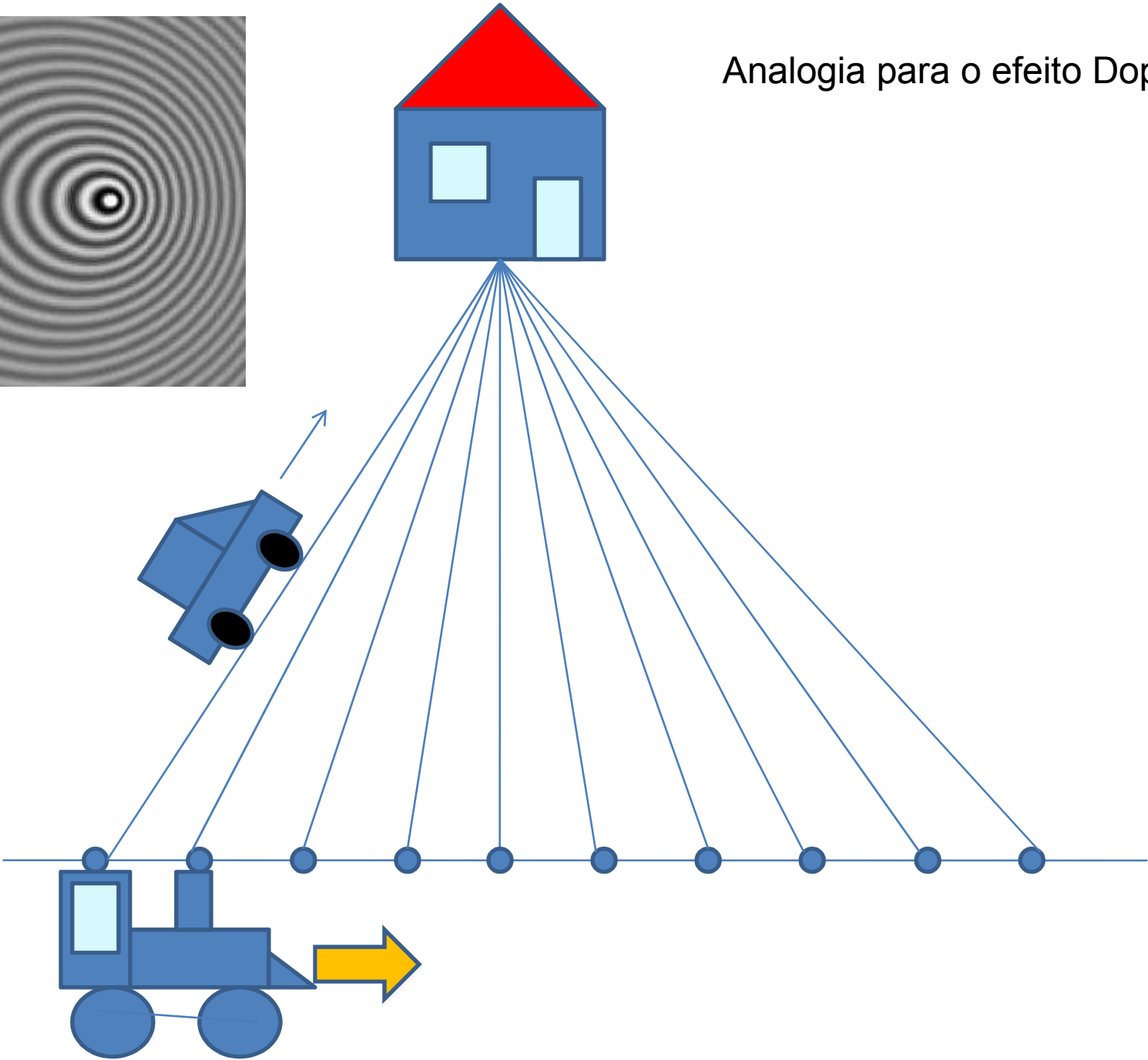
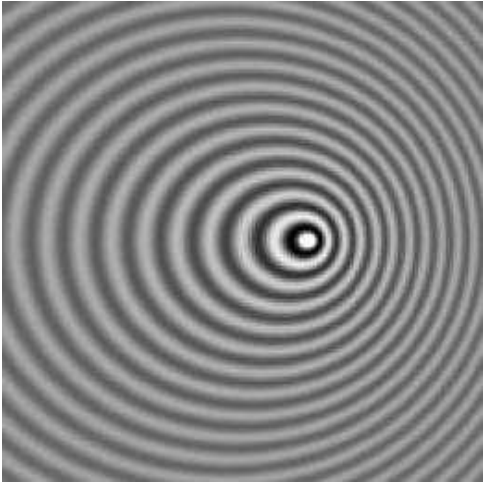


Dois meios complementares,  
Aniquilam o efeito do outro.  
Efetivamente, tudo ocorre como  
se removesse o meio com  
espessura  $2d$ .

$$\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$$



Analogia para o efeito Doppler



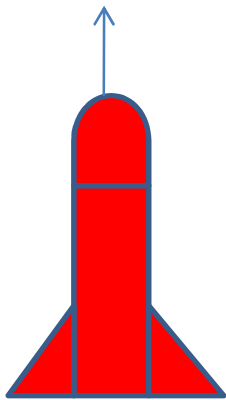
## Efeito Doppler reverso

A fase da onda é um invariante!

Supondo uma fonte que emite radiação com frequência  $\omega$  e se move com velocidade  $v$  com respeito ao meio. A frequência medida por um detector no referencial do meio é

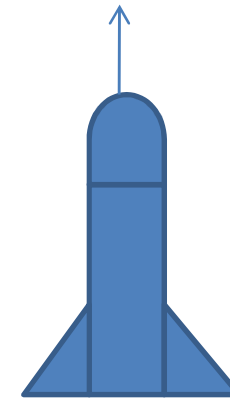
$$\omega' = \gamma(\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \text{ onde } \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

$$\text{Mas } \mathbf{k} = (n\omega/c) \mathbf{n}$$



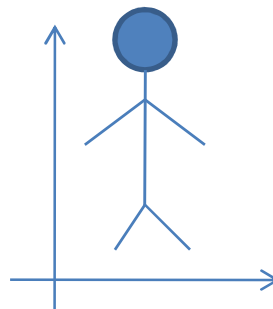
Red shift

$$n > 0$$



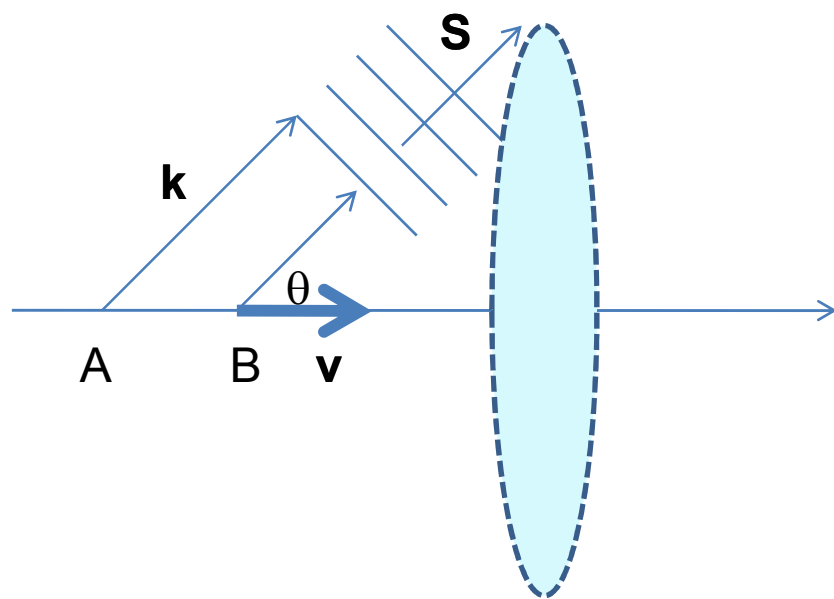
Blue shift

$$n < 0$$

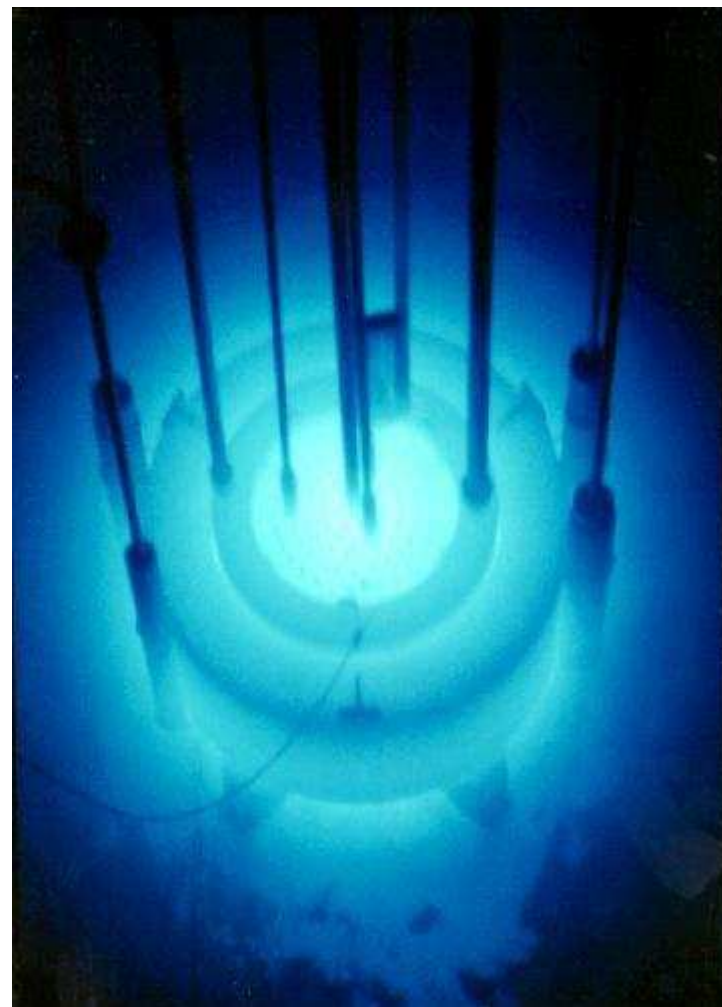


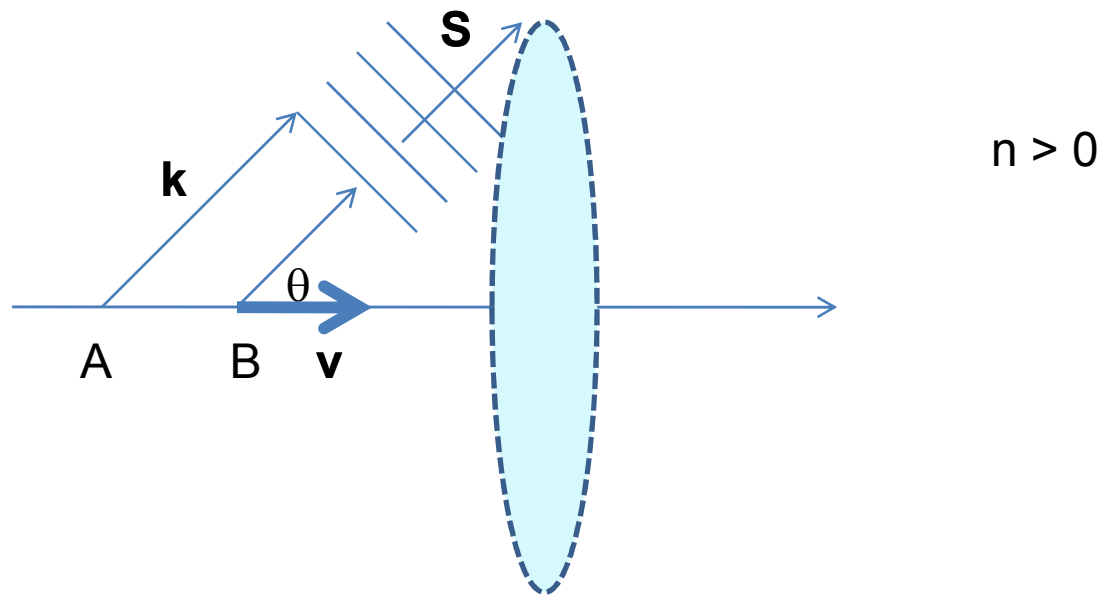


## Radiação de Cerenkov

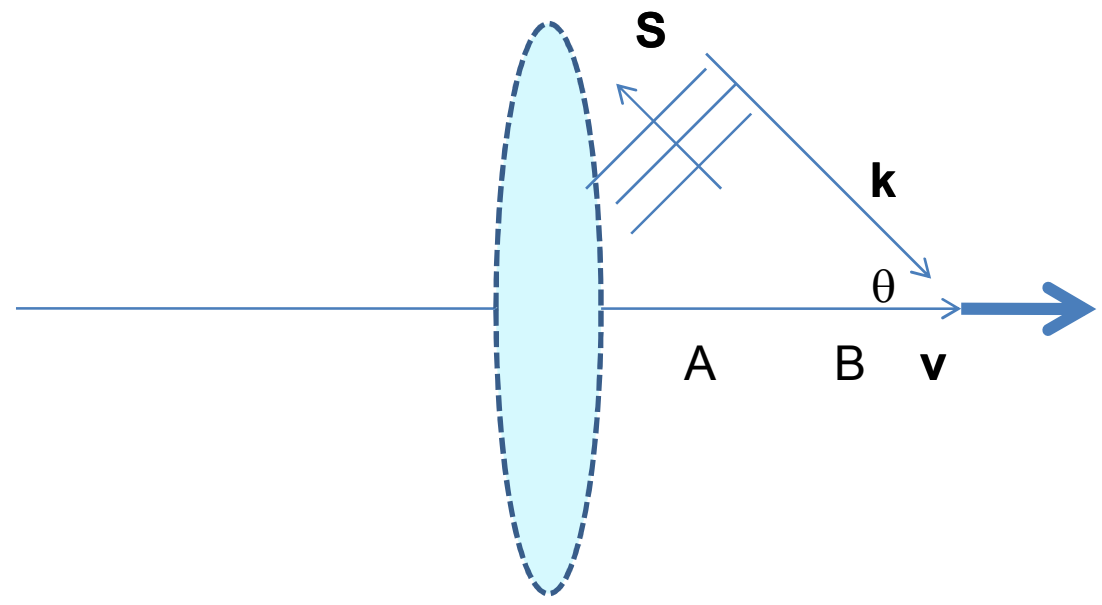


$$\cos\theta = v_{\text{luz}}/v = c/vn$$





$n < 0$



Resumo dos efeitos  
“sinistros”:



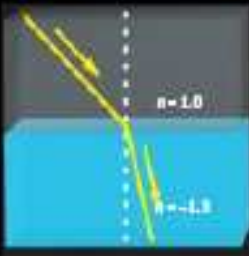
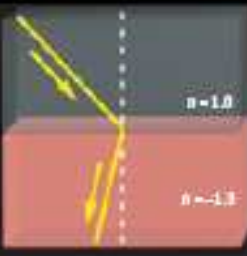




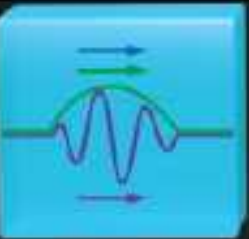
Efeito Doppler

Radiação de Cerenkov

Velocidade de grupo e de fase

### NEGATIVE-INDEX WEIRDNESS

In a medium with a negative index of refraction, light (and all other electromagnetic radiation) behaves differently than in conventional positive-index material. In a number of counterintuitive ways.

POSITIVE-INDEX MEDIUM	NEGATIVE-INDEX MEDIUM
<p>A pencil in a glass of water appears bent because of the water's higher refractive index.</p> 	<p>A pencil embedded in a negative-index medium would appear to bend all the way out of the medium.</p> 
<p>When light travels from a medium with low refractive index (<math>n</math>) to one with higher refractive index, it bends toward the normal (dashed line at right angles to surface).</p> 	<p>When light travels from a positive-index medium to one with negative index, it bends all the way back to the same side of the normal.</p> 
<p>A receding object appears redder because of the Doppler effect.</p> 	<p>A receding object appears bluer.</p> 
<p>A charged object (red) traveling faster than the speed of light generates a cone of Cerenkov radiation (yellow) in the forward direction.</p> 	<p>The cone points backward.</p> 
<p>In a positive-index medium, the individual ripples of an electromagnetic pulse (purple) travel in the same direction as the overall pulse shape (green) and the energy (blue).</p> 	<p>The individual ripples travel in the opposite direction to the pulse shape and the energy.</p> 