INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Pós-Graduação

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Aula 2
A matemática do movimento ondulatório

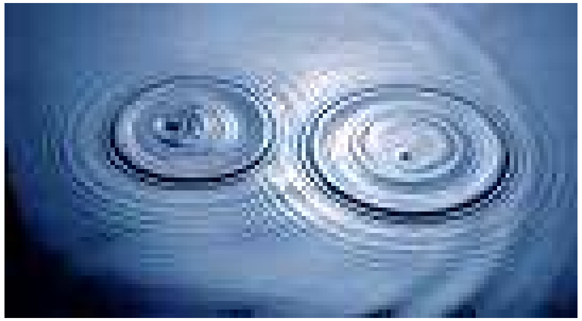
Referência: E. Hecht, óptica, Fundação Calouste Gulbekian, segunda edição portuguesa (2002);

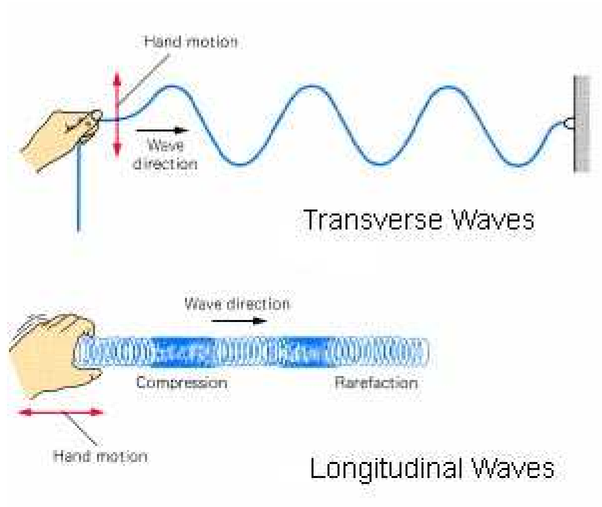
The best advice to anyone who would write a physics textbook, especially an introductory textbook, is to adopt the working hypothesis that everything in previous textbooks is wrong. But that is not what usually is done. Like a medieval monk cloistered in a cell decorating illuminated manuscripts but leaving dogma intact, the writer of textbook *N* dutifully copies what is in textbook *N*-1, adding a few arabesques but blithely transmitting errors unto the *N*th generation. This advice may seem extreme so I'll soften it a bit by saying that almost every assertion in textbooks in the form of an invariable, unqualified mantra, especially if it asserts supposed limits, is wrong. And the more times the mantra is repeated in print, the more likely it is to be wrong. There are so many examples that it is difficult to know where to begin, but among my favorites are erroneous treatments of refractive indices. I won't indict any offending textbooks. You can find them for yourselves. What Stephen Jay Gould[1] calls the "cloning of contents" because "authors of textbooks copy from other texts and often do not read original sources" is not unique to physics, and he gives an amusing example from evolutionary biology. He notes that "good teaching requires fresh thought…rote copying can only indicate boredom and slipshod practice."

The nearly universal textbook statement is that c/n is the "velocity of light" in a medium with refractive index n, which must be greater than 1, the implication being that if it were not, Einstein would be dethroned. Well c/n is not *the* "velocity of light;" it is only one among many, the *phase velocity* of a plane harmonic wave. Let's set aside that such a wave cannot exist because it would have to occupy all space and exist for all time. The phase velocity cannot be determined by time-of-flight measurements. It is neither the velocity of a palpable object nor of a signal. Leaf through the three-volume compendium of refractive indices edited by Palik[2] and you will discover that it is nearly impossible to find a material for which n is *not* less than 1 at some frequencies. And these are not exotic materials. Try table salt.

When students stumble on refractive indices less than 1, they sometimes are placated with, “Don’t fret. The group velocity can’t be greater than c.” They don’t know what the group velocity is, but invoking it makes them go away. Alas, the cure is worse than the ailment because the group velocity not only can be greater than c, it can be negative and *less* than $-c$. There are in fact many “velocities of light.”[3,4]

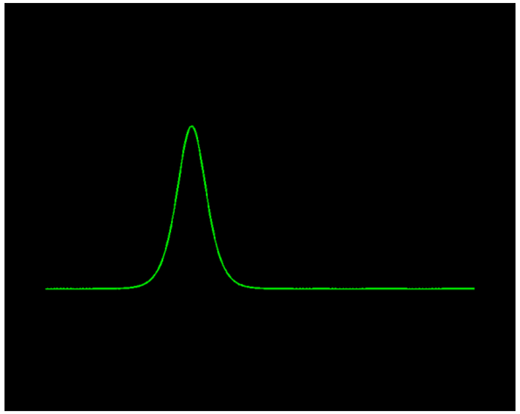
Muitos fenômenos físicos, aparentemente distintos, podem ser descritos matematicamente em termos de ondas.





O aspecto essencial da propagação de uma é que esta consiste numa perturbação auto-sustentada do meio através do qual se propaga.

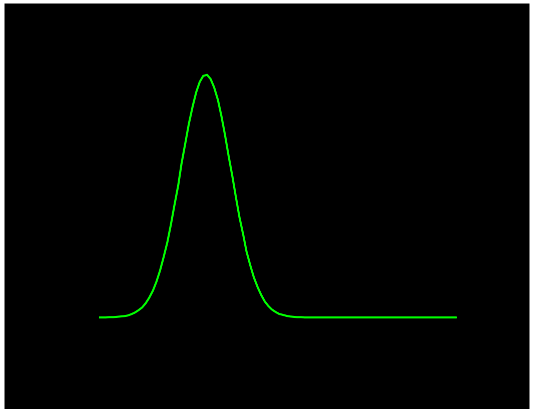
Se há propagação, a perturbação deve ser expressa como função do espaço e do tempo:



$$\psi = f(x,t)$$

(ψ lê-se psi)

A forma da perturbação em qualquer instante, obtem-se particularizando o valor da variável tempo: (por exemplo t =0)

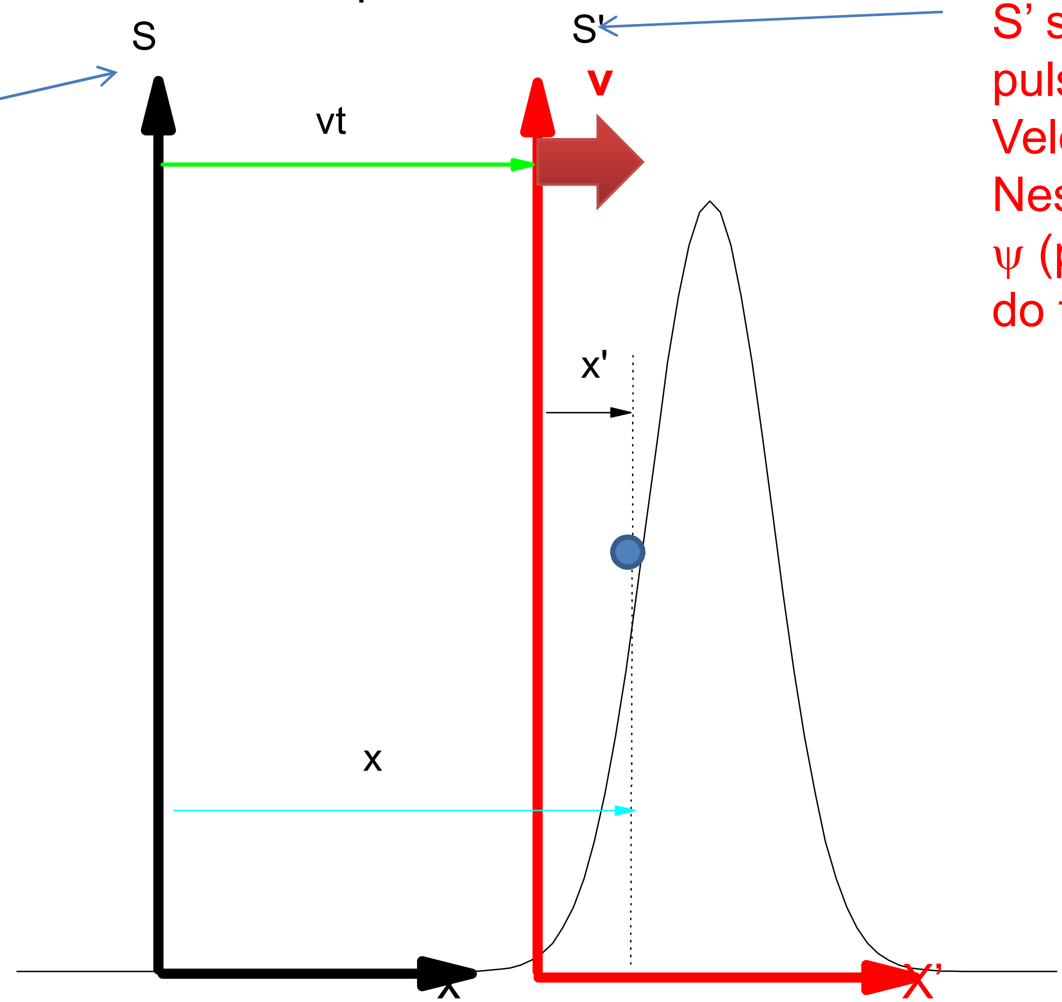


$$\psi(x,t)\,\big|_{t=0} = f(x,0) = f(x)$$

Representa a forma (perfil) da onda

Considere um pulso caminhando para a direita

S é um sistema fixo



S' se desloca com o pulso com a mesma Velocidade v.
Neste sistema
ψ (psi) não é função do tempo, $\psi = f(x')$

$$X' = X - Vt$$

Com base no slide anterior

$$\psi(x,t) = f(x') = f(x - vt)$$

Esta equação representa a forma mais geral da **<u>função de onda</u>** em uma dimensão.

Basta apenas escolher a forma f(x,o) =f(x) e substituir x por (x-vt) em f(x)!

Do mesmo modo, se a onda se desloca para a esquerda:

$$\psi(x,t) = f(x+vt) \qquad \text{Com } v > 0$$

Isto permite obter a forma geral da equação de ondas a uma dimensão:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial f}{\partial x'} \qquad x' = x \pm vt$$

Se x se mantiver constante, a derivada parcial de $\psi(x,t)$ no tempo é:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\overbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}^{\pm v} = \pm v\,\frac{\partial f}{\partial x'}$$

Combinando ambas as equações:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Mas como são necessárias duas constantes para especificar totalmente uma onda , a equação mais geral deve ser de segunda ordem. Calculando as segundas derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

Uma vez que

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{df}{dt}$$

E lembrando que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Então

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

Combinando estas equações, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

A equação de ondas!

Que admite soluções da forma

$$\psi = Af(x - vt) + Bg(x + vt)$$

FASE E VELOCIDADE DE FASE

$$\psi\,(x,t) = A\ sen\ (kx \pm \omega t + \varepsilon)$$

$$Fase \quad \varphi = kx \pm \omega t + \varepsilon$$

Constante de fase

Variação da fase com o tempo $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right| = \omega$

Variação da fase com a posição $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right| = k$

fase constante $\dfrac{d\varphi}{dt} = k\,\dfrac{dx}{dt} \pm \omega = 0$

velocidade de fase $\dfrac{dx}{dt} = v = \pm\,\dfrac{\omega}{k}$

VELOCIDADE DE GRUPO

Em meios dispersivos a velocidade de fase depende do comprimento de onda .

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

A moduladora, ou sinal, propaga-se a uma velocidade v_g, que pode ser superior, igual ou inferior à velocidade de fase da transportadora, v

como $$\omega = kv$$

então $$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

Em particular em meios não dispersivos em que v não depende de λ,

$$dv/dk = 0 \quad e \quad v_g = v$$

Em meios dispersivos onde $n = n(k)$, $\omega = kv = kc/n$
v_g *pode ser escrito na forma:*

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk}$$

$$v_g = v\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk}$$

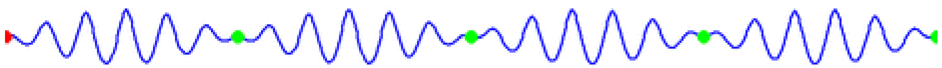
$$v_g = v\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

Em meios óticos e em regimes de dispersão normal, o índice de refração aumenta com a frequência ($dn/dk > 0$), logo $v_g < v$.

Podemos definir então um índice de refração de grupo,

$$n_g = c/v_g$$

A relatividade restrita não permite a propagação de sinais com velocidade superior a c. Todavia, em certas circunstâncias a velocidade de fase pode ser maior do que c. A contradição é apenas aparente, e resulta do fato de uma onda monocromática, apesar de se poder propagar a uma velocidade superior à da luz no vácuo, c, não poder transportar informação.



Dispersão em grupos bicromáticos de ondas. O ponto vermelho move-se com velocidade de fase enquanto que o ponto verde se propaga com velocidade de grupo. Neste caso, a velocidade de fase é duas vezes a velocidade de grupo. O ponto vermelho ultrapassa dois pontos verdes.

A velocidade de grupo é frequentemente vista como a velocidade na qual a energia e a informação são transportadas na onda.

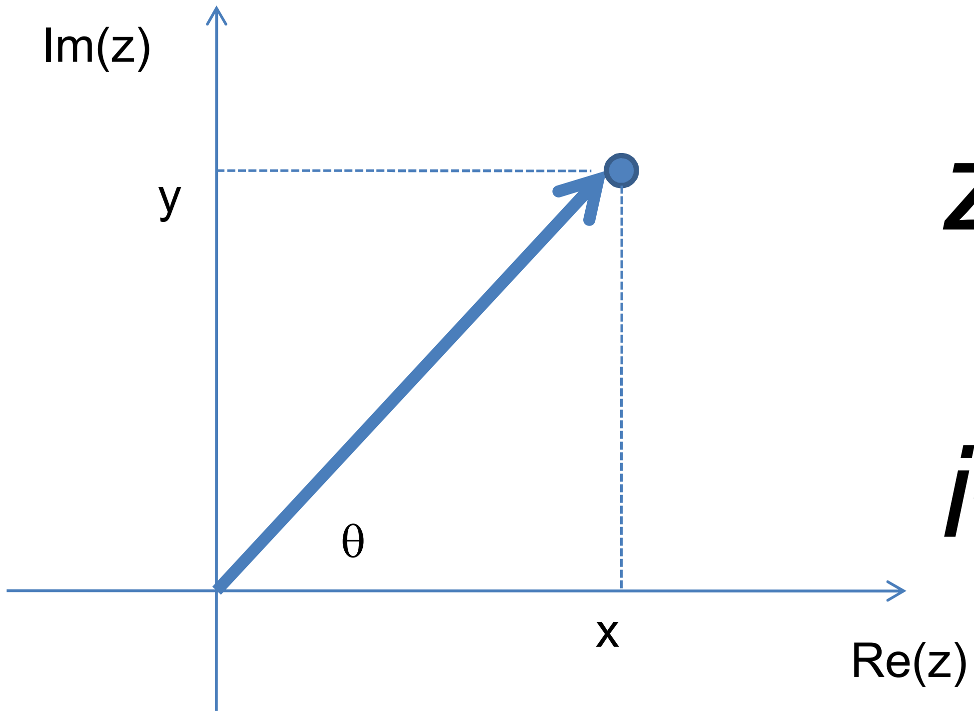
No entanto, se a onda está atravessando um meio absorverdor, isto nem sempre é verdade. Vários experimentos mostram que é possível que a velocidade de grupo de uma luz laser em certos materiais podem exceder a velocidade da luz no vácuo!

Atenção!

Mas a comunicação superluminal não é possível, pois a velocidade do sinal permanece menor do que a velocidade da luz. É possível também reduzir a velocidade de grupo da luz a zero, parando o pulso, ou ter uma velocidade de grupo negativa, parecendo que o pulso se propaga para trás.

Mas, em todos estes casos, os fótons continuam se propagando com a velocidade da luz no meio.

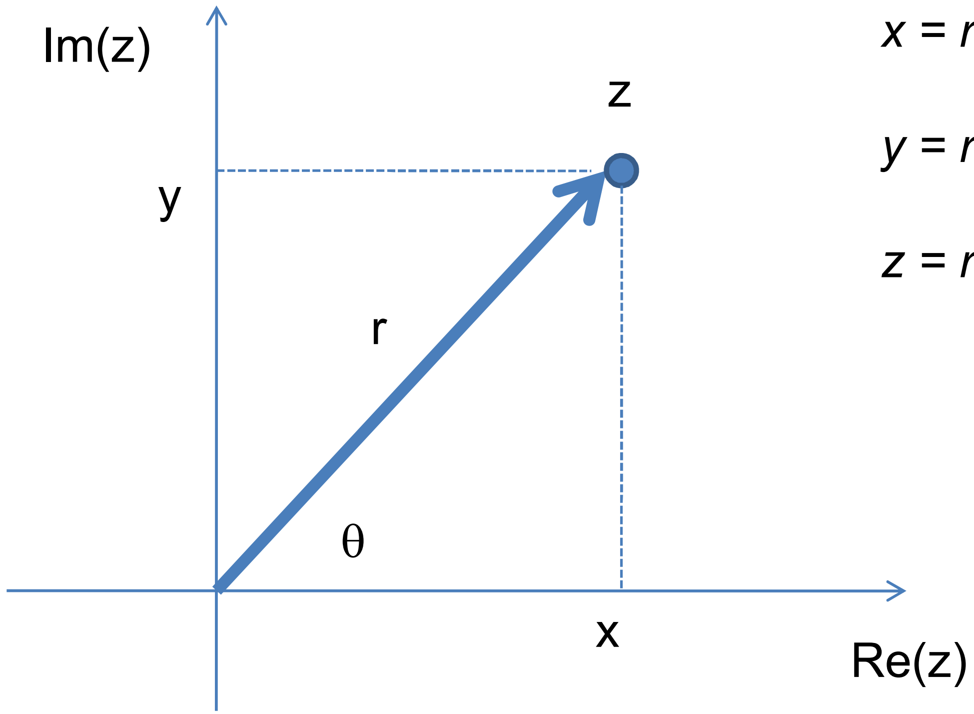
REPRESENTAÇÃO COMPLEXA



$$z = x + iy$$

$$i^2 = -1$$

REPRESENTAÇÃO COMPLEXA



$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\theta$

$z = r(\cos\theta + i\,sen\theta)$

$$z = r(\cos\theta + i\ sen\theta)$$

diferenciando

$$dz = r(-sen\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$

Colocando i em evidência

$$dz = i\, r(i sen\theta + \cos\theta) d\theta$$

Re-escrevendo em termos de z

$$dz = izd\theta$$

$$dz/z = id\theta$$

$$\ln z = i\theta$$

Fórmula de Euler

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = re^{i\theta}$$

Módulo de z

$$|z| = r$$

Complexo conjugado

$$\begin{cases} z^{*} = re^{-i\theta} \\ z^{*} = x - iy \end{cases}$$

Adição e subtração:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$$

Multiplicação e divisão:

$$Z_1 . Z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$Z_1 / Z_2 = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Temos ainda:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$|z| = \sqrt{zz^*}$$

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = \cos\pi + i\cancelto{0}{\mathrm{sen}\,\pi} = -1$$

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$$

$$e^{z+i2\pi} = e^{z} e^{i2\pi} = e^{z}$$

$$Z = Re(z) + i\ Im(z)$$

$$Re(z) = \tfrac{1}{2}\,(z + z^*)$$

$$Im(z) = (1/2i)(z - z^*)$$

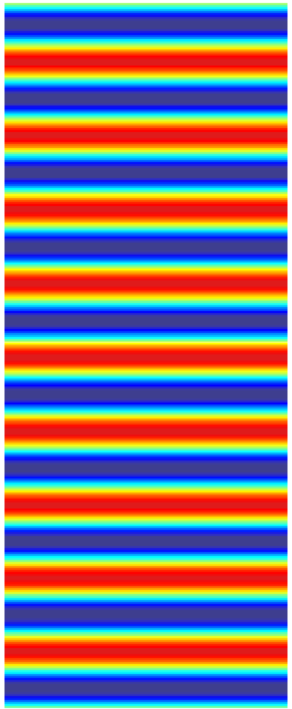
Então, quer a parte real, quer a parte imaginária podem representar ondas harmônicas. É habitual escolher a parte real, e descrever a onda como...

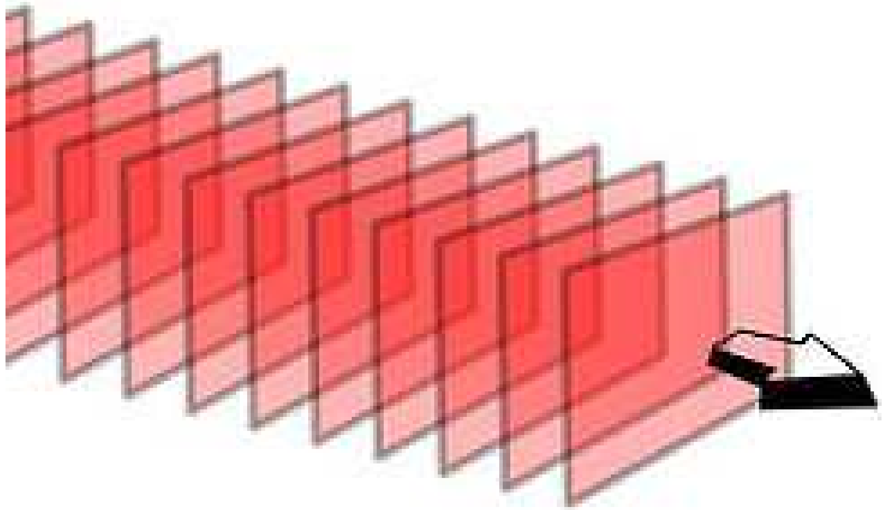
$$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}\right]$$

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varepsilon) = Ae^{i\varphi}$$

Apenas no final dos cálculos se extrairá a parte real das equações.

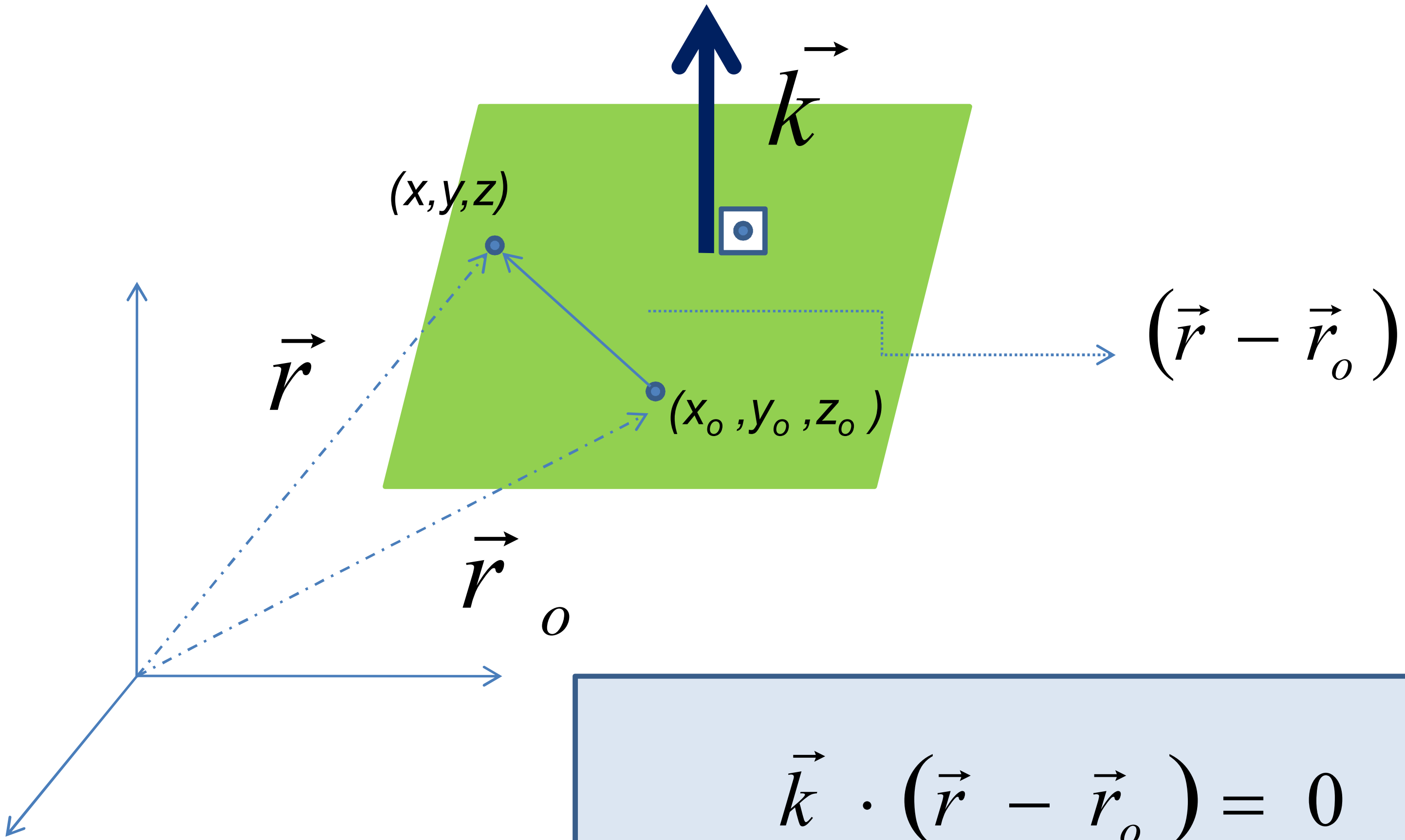
ONDAS PLANAS





Constituem provavelmente os mais simples exemplos de ondas tridimensionais.

Para ondas planas, as superfícies de igual fase são planos, em geral perpendiculares à direção de propagação da perturbação



$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$$

A forma mais reduzida da equação do plano perpendincular à **k** é

$$\mathbf{k.r} = constante = a$$

É possível construir um conjunto de planos para os quais $\psi(\mathbf{r})$ dependa senoidalmente das variáveis espaciais:

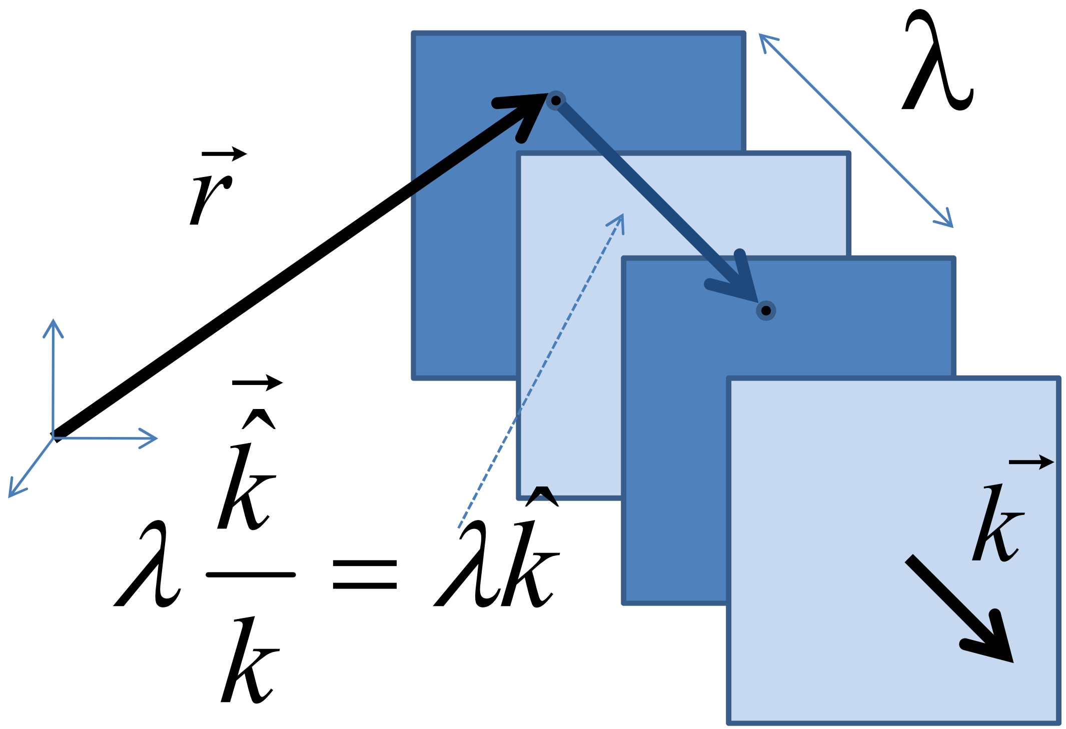
$$\psi(\vec{r}) = Asen(\vec{k}.\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = A\cos(\vec{k}.\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

A natureza periódica das funções harmônicas no espaço pode ser expressa na forma:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$$



$$\lambda \frac{\vec{k}}{k} = \lambda\hat{k}$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$$

$$Ae^{i\vec{k}.\vec{r}} = Ae^{i\vec{k}.\left(\vec{r}+\lambda\hat{k}\right)} = Ae^{i\vec{k}.\vec{r}}e^{i\lambda k}$$

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$$

$$\lambda k = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Para que os planos de igual fase se propaguem é necessário que ψ (**r**) varie no tempo, o que se consegue introduzindo a dependência temporal :

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\left[\vec{k}.\vec{r} \pm \omega t\right]}$$

$$\phi = \left[\vec{k}.\vec{r} \pm \omega t\right]$$

fase

$$\phi = const$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = k\frac{dr}{dt} \pm \omega = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = k\frac{dr}{dt} \pm \omega = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = v_{fase} = \pm\frac{\omega}{k}$$

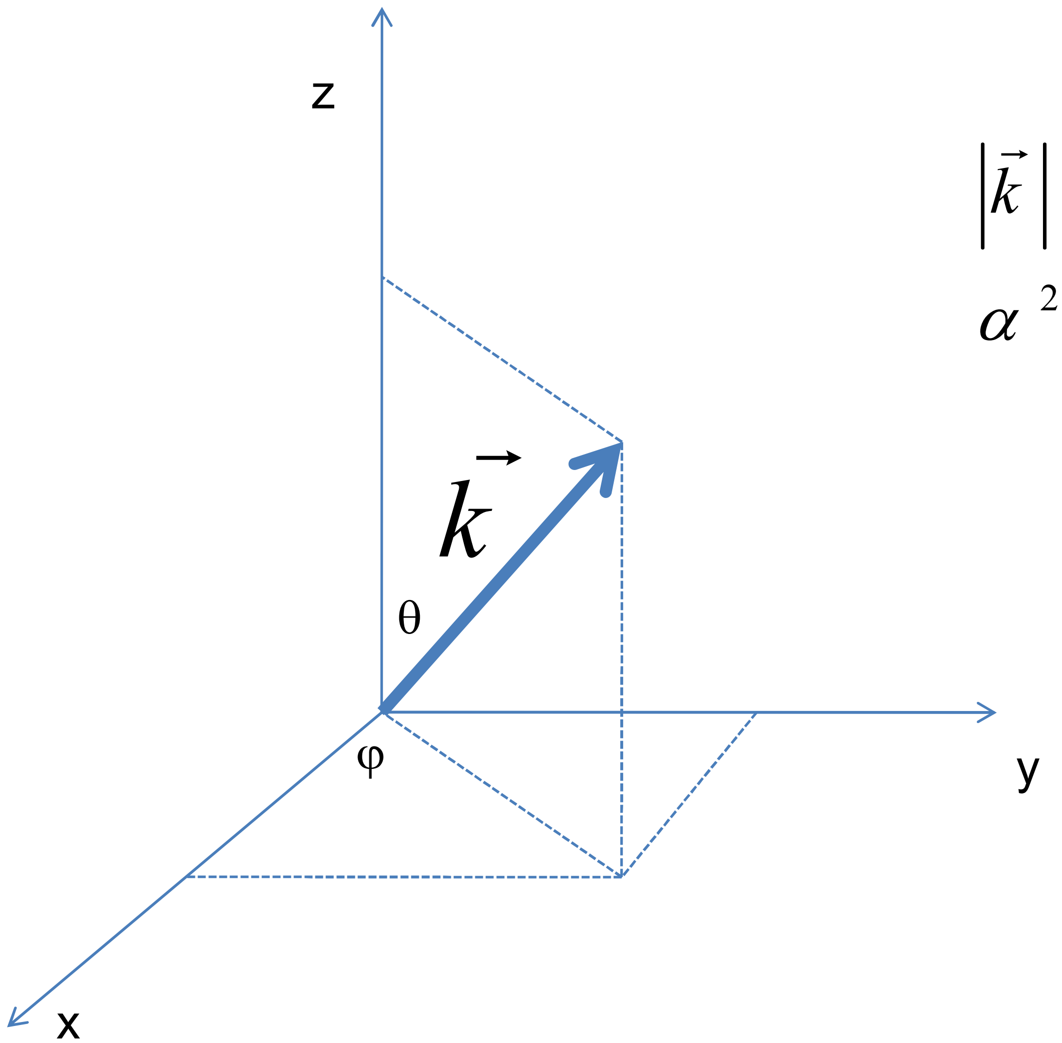
Uma onda plana harmônica é representada em coordenadas cartesianas, na forma:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i\left(k_x x + k_y y + k_z z \pm \omega t\right)}$$

ou

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i\left[k\left(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm \omega t\right)\right]}$$

Onde α,β, e γ são os co-senos diretores de **k**



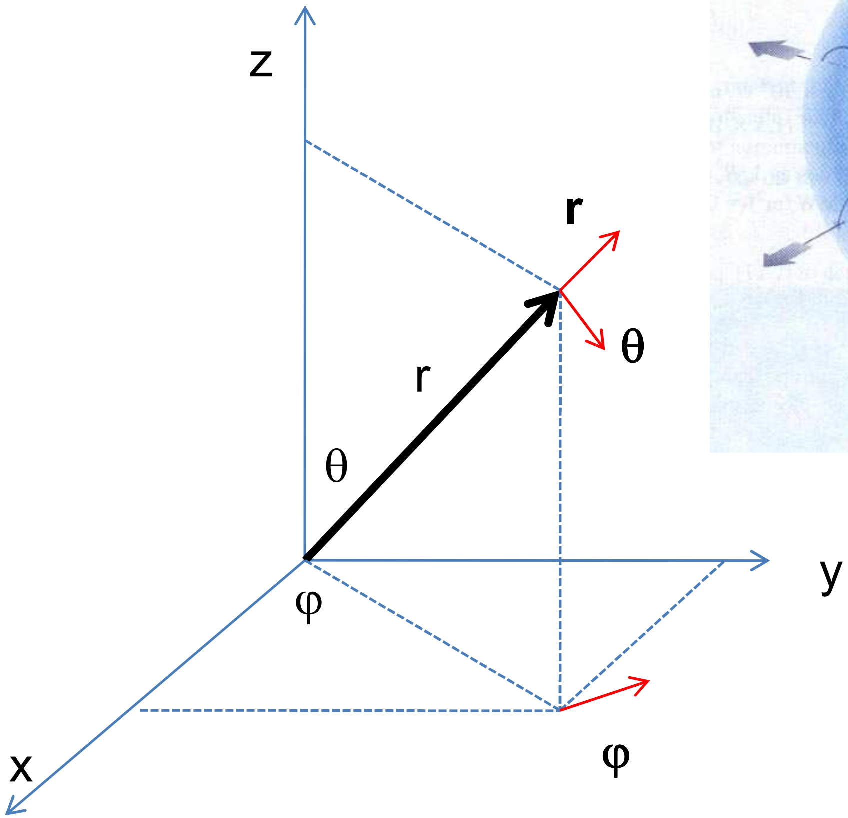
$$\left|\vec{k}\right| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

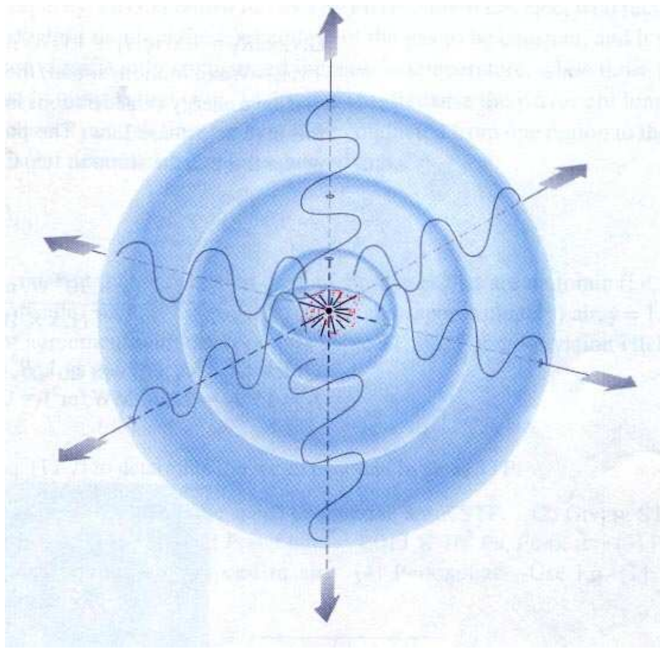
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

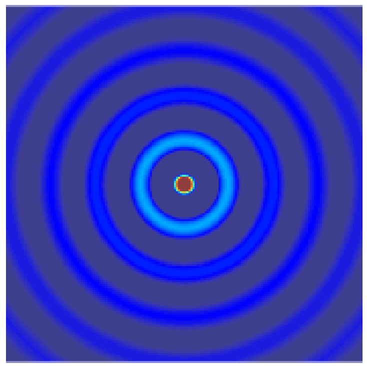
Problema 2.19 (Hecht)

ONDAS ESFÉRICAS

$x = r\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\varphi$
$y = r\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\varphi$
$z = r\ \cos\theta$







O laplaciano em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Procura-se construir uma descrição de ondas esféricas, ou seja,

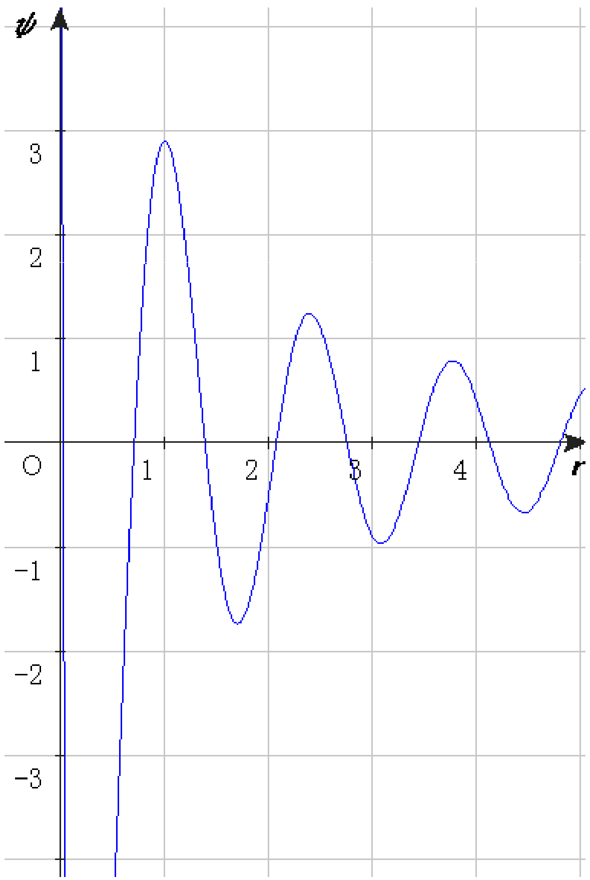
$$\psi\,(\,\mathbf{r}\,) = \psi\,(r, \theta, \phi) = \psi\,(\,r)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}_{0}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Onda esférica harmônica:

$$\psi(r,t) = \left(\frac{A}{r}\right)\cos k(r \pm vt)$$



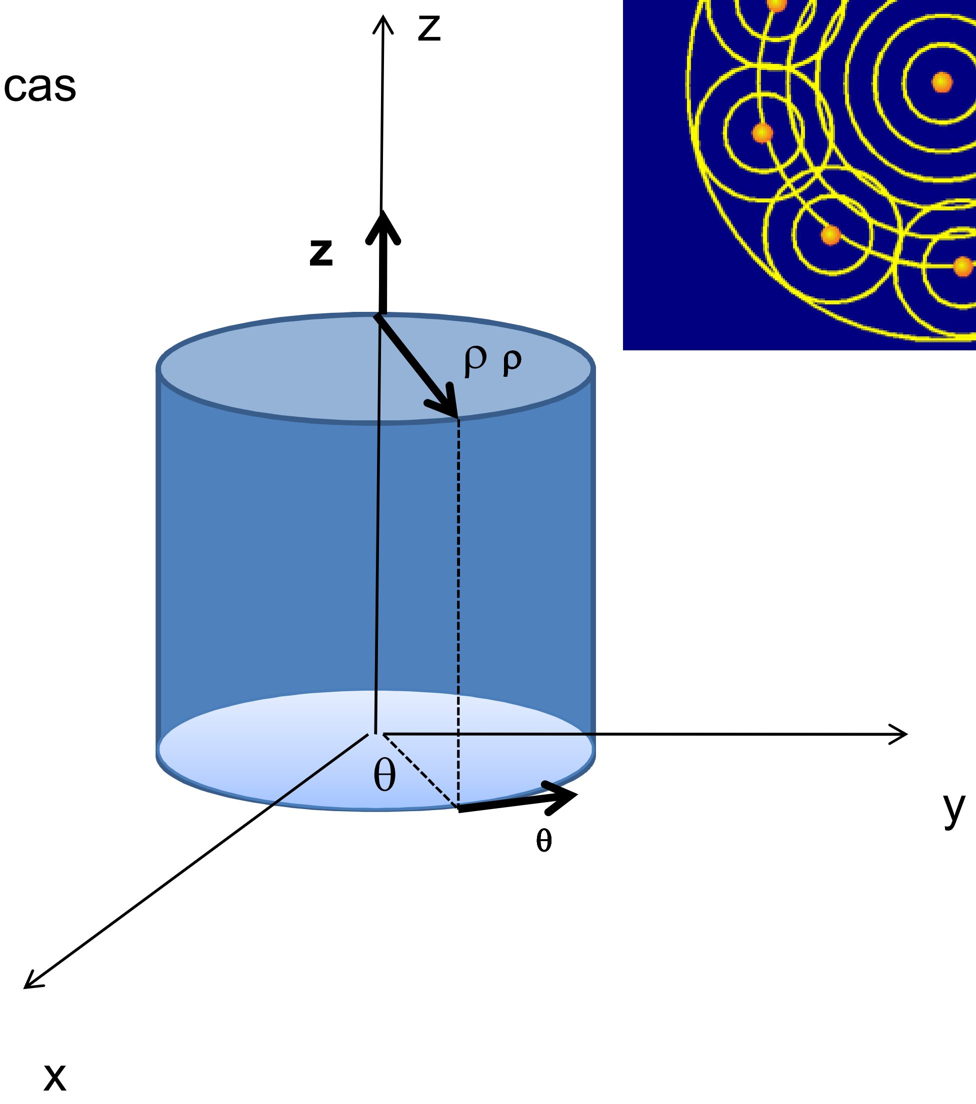
ONDAS CILÍNDRICAS

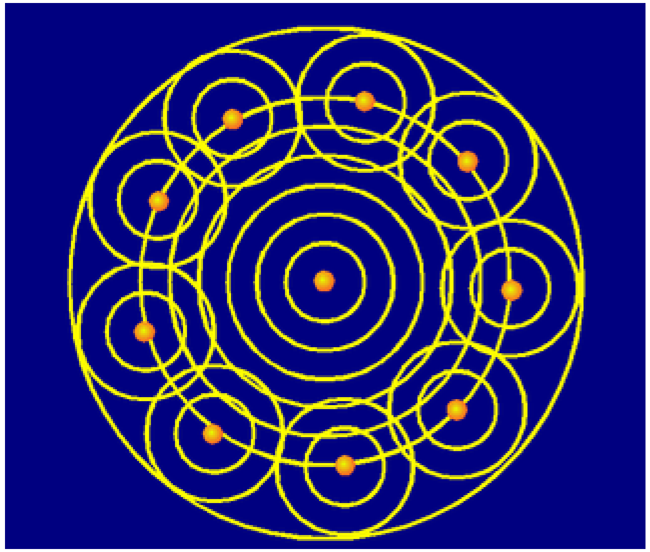
coordenadas cilindricas

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho sen\, \theta$$

$$z = z$$





ONDAS CILÍNDRICAS

O Laplaciano em coordenadas cilindricas é

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

A simetria cilíndrica traduz-se pela seguinte exigência:

$$\psi(r) = \psi(\rho,\theta, z) = \psi(\rho)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\cancelto{0}{\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Equação de onda em coordenadas cilíndricas

Qual deve ser a forma de ψ (**r**) das soluções desta equação ?

$$\psi(r,t) \approx \frac{A}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)}$$

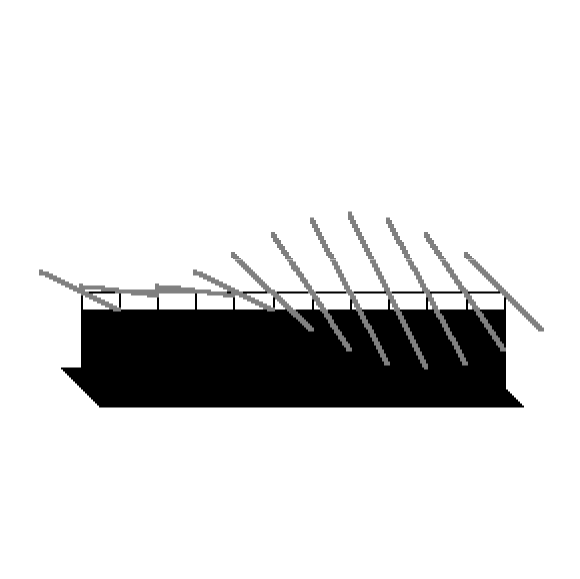
Esta equação representa um conjunto de cilindros coaxiais que preenchem todo o espaço e que se afastam ou se aproximam de um fonte linear de comprimento infinito situada no eixo.

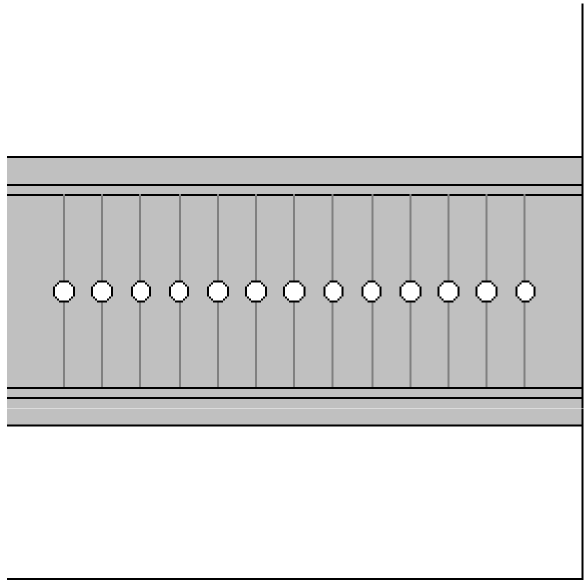
ONDAS ESCALARES E ONDAS VETORIAIS

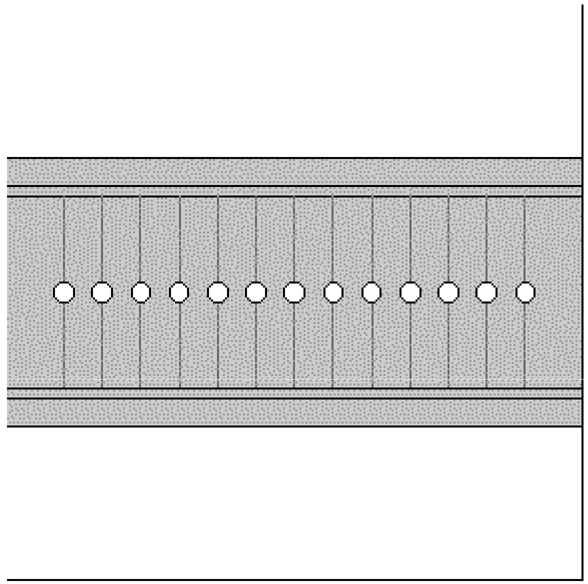
As ondas classificam-se em

- Ondas longitudinais
- Ondas transversais

Dependendo da direção ao longo do qual a perturbação ocorre e a direção de **k**





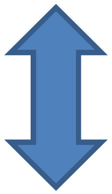


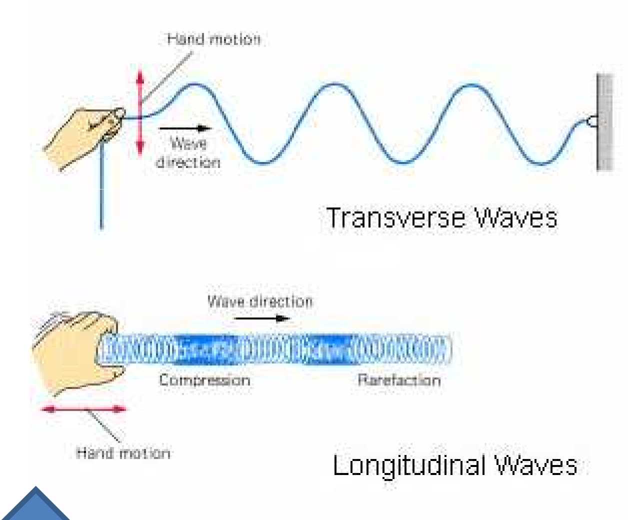
A luz é uma onda transversa e a compreensão correta da sua natureza vetorial é de importância extrema. A polarização da luz é um fenômeno que só pode ser descrito em termos deste modelo de onda vetorial.

Emissão e absorção de ondas: Impedância

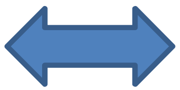
Vamos examinar o mecanismos pelos quais ondas são emitidas por um transmissor e refletidas quando encontram uma descontinuidade no meio.

u(t) $\rightarrow$ velocidade de saída do transmissor

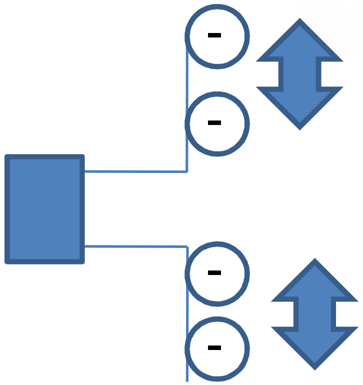




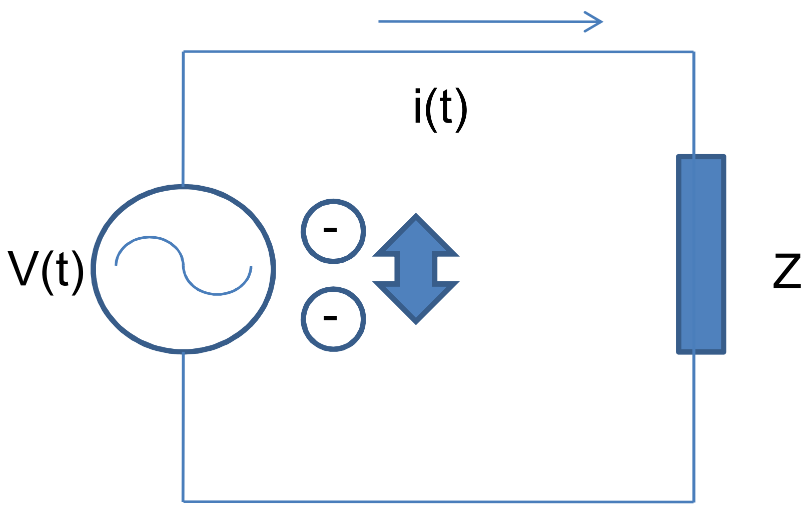
Velocidade transversal da mão



Velocidade longitudinal da mão



Velocidade de oscilação das cargas em uma antena



No caso de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão, ou circuitos, a velocidade das cargas do gerador é proporcional à corrente :

$$u(t) \propto i(t)$$

Impedância caracteristíca (no caso eletromagnético)

$$Z = \frac{V(t)}{i(t)} \qquad [Z] = \Omega$$

No caso mecânico:

Força impulsora

$$Z = \frac{F(t)}{u(t)} \qquad [Z] \neq \Omega$$

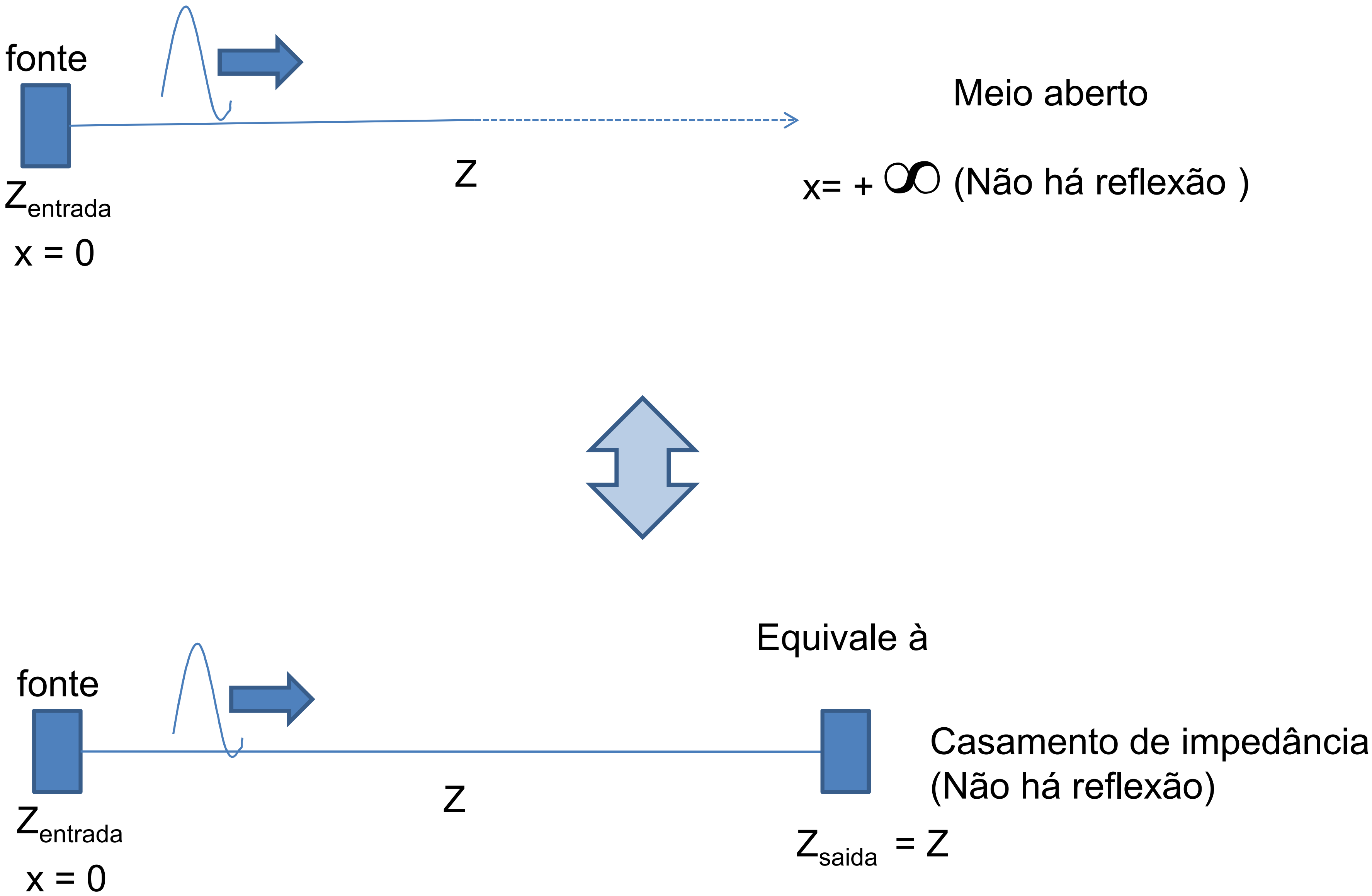
Veremos que a impedância característica depende das mesmas duas propriedades do meio assim como a velocidade de propagação, v, ou seja, a propriedade tipo “inércia” e a propriedade tipo “força de retorno” .

A impedância característica Z, existe somente, porque o transmissor está acoplado a um meio aberto e está emitindo ondas. O meio aberto atua como uma “impedância resistiva de carga”.

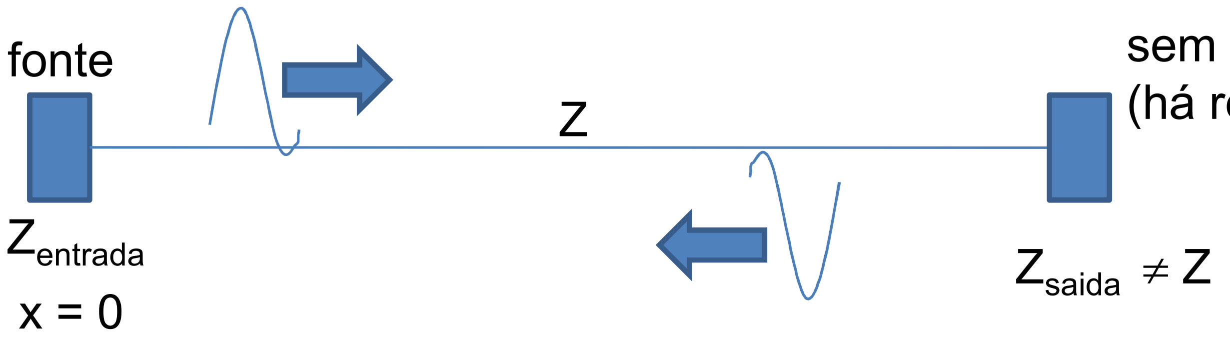
Potência irradiada:

$$P(t) = F(t) \times u(t) = Z \times u(t)^2 = F(t)^2 / Z \qquad \text{(mecânica)}$$

$$P(t) = V(t) \times I(t) = Z \times I(t)^2 = V(t)^2 / Z \qquad \text{(eletromagnética)}$$



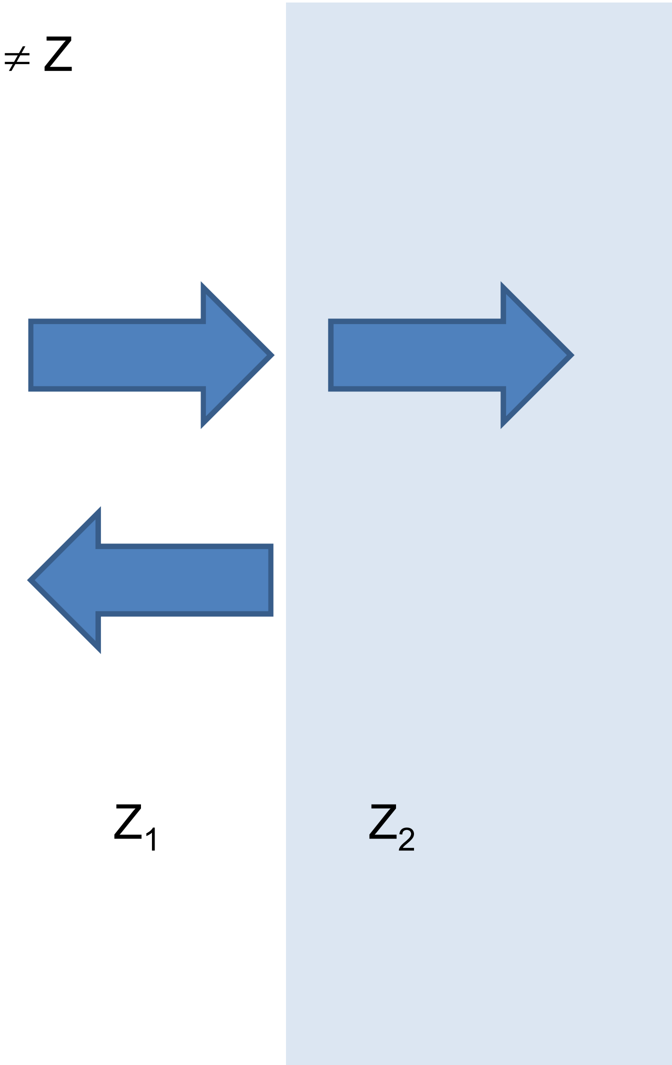
fonte
Meio aberto
Z
$Z_{entrada}$
x = 0
x= + ∞ (Não há reflexão)
Equivale à
fonte
Casamento de impedância
(Não há reflexão)
Z
$Z_{entrada}$
x = 0
Z_{saida} = Z



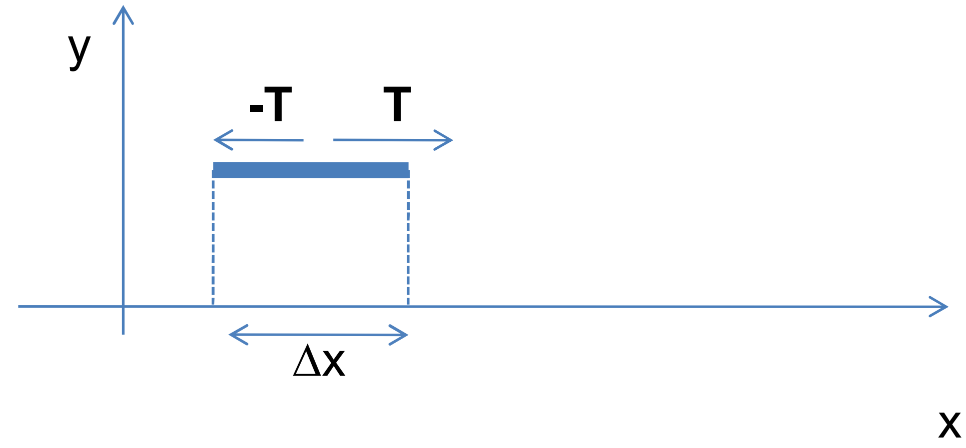
sem casamento de impedância
(há reflexão)

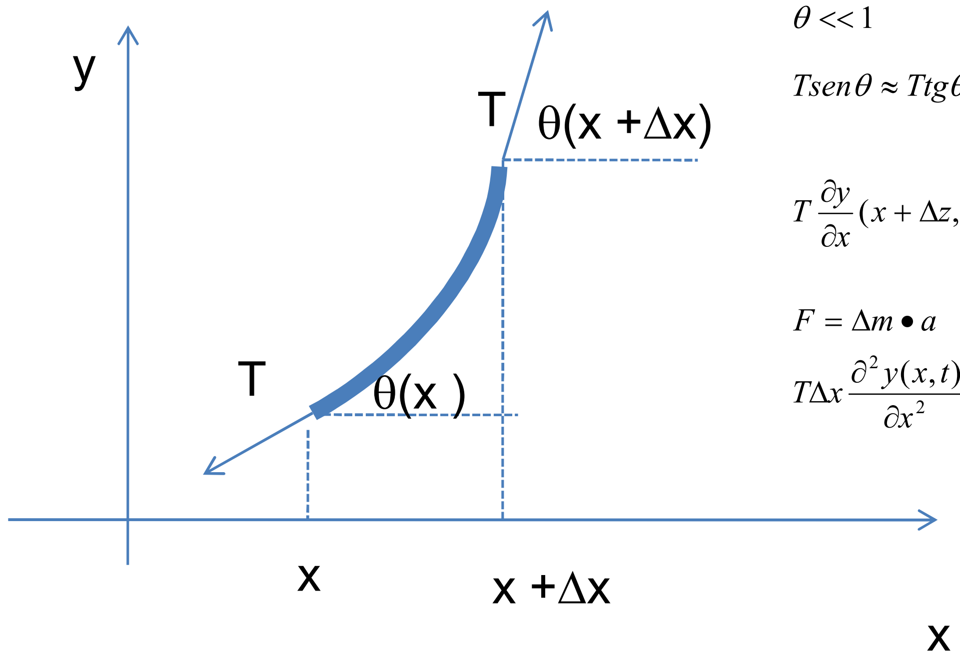
$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Coeficiente de reflexão



Emissão e absorção de ondas em uma corda contínua





$$\theta << 1$$

$$Tsen\theta \approx Ttg\theta = T\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta z,t) - T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0} T\Delta x\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta z,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}\right) = T\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$F = \Delta m \bullet a$$

$$T\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\theta << 1$$

$$Tsen\theta \approx Ttg\theta = T\frac{\partial y}{\partial x}$$

Força resultante vertical

$$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta z,t) - T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0} T\Delta x\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta z,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}\right) = T\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$F = \Delta m \bullet a$$

Segunda Lei de Newton

$$T\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Divindo por Δx, temos:

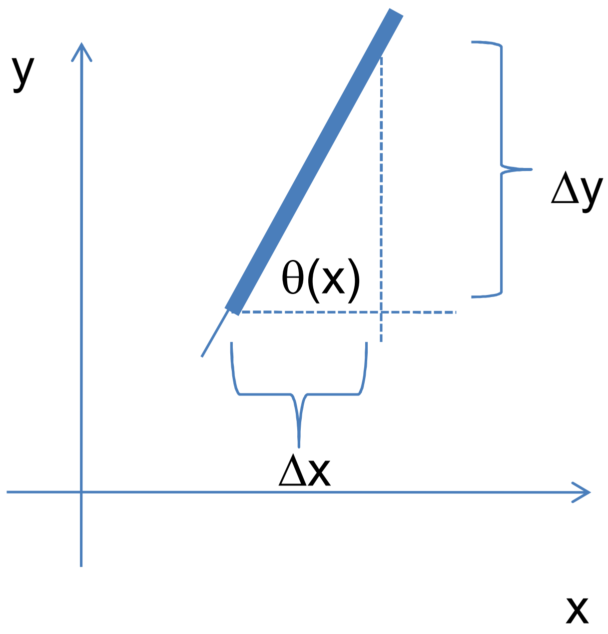
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Comparando com a Equação de onda

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Temos:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

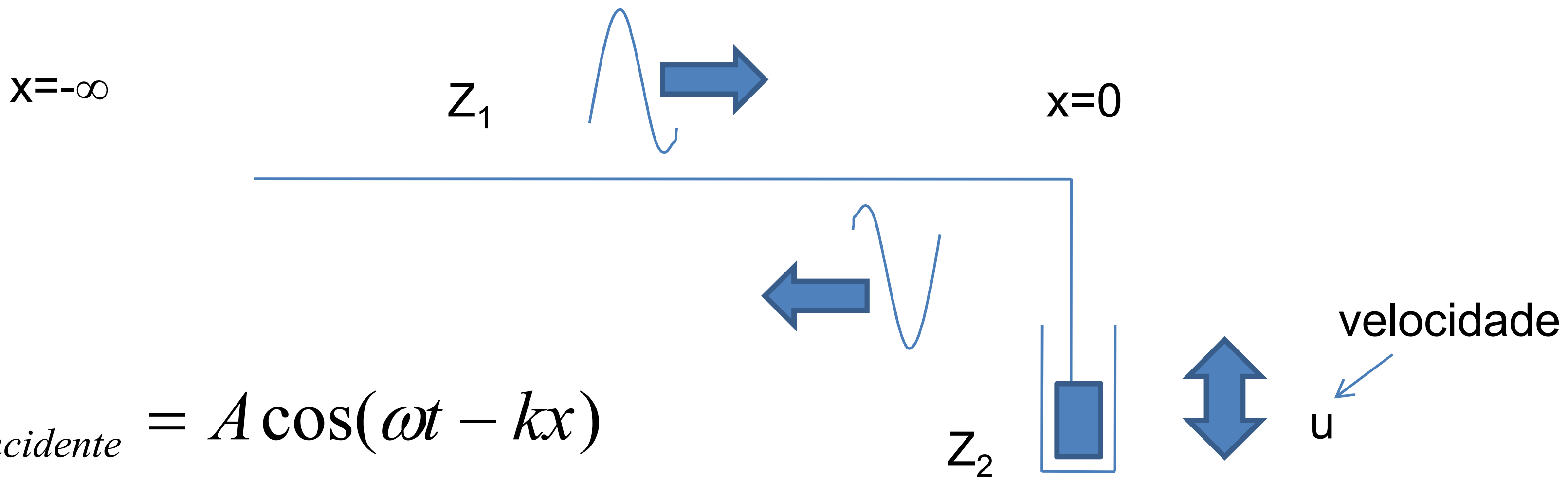


$$tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\partial y / \partial t}{v}$$

$$F(t) = Ttg\theta = T\,\frac{\partial y / \partial t}{v} = Z\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$Z = \frac{T}{v} = \mu v = \sqrt{T\mu}$$

Reflexão de uma onda em um meio não casado

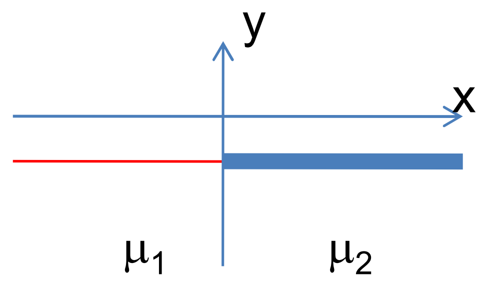


$$y_{incidente} = A\cos(\omega t - kx)$$

Pistão
(força de arrasto)

$$y_{refletida} = R_{12} A\cos(\omega t + kx)$$

$F = -Z_2 u$



$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + R_{12} A\cos(\omega t + kx)$$

Condições de contorno em x=0

A corda exerce uma força na carga dada por:

$$F(corda / c\arg a) = -T\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\right)$$

A força exercida pela carga na corda é:

$$F(c\arg a / corda) = -Z_2\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial t}\right)$$

Mas, de acordo com a terceira lei de Newton: $F_{12} = - F_{21}$

$$T\frac{\partial y}{\partial z} + Z_2\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Inserindo a função de onda na equação acima, temos:

$$Tk\,sen(\omega t) - TkR_{12}\ sen(\omega t) - Z_2\omega\, sen(\omega t) - Z_2\omega R_{12}\ sen(\omega t) = 0$$

Onde $k=\omega/v$

$$R_{12} = \frac{T/v - Z_2}{T/v + Z_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Casos limites:

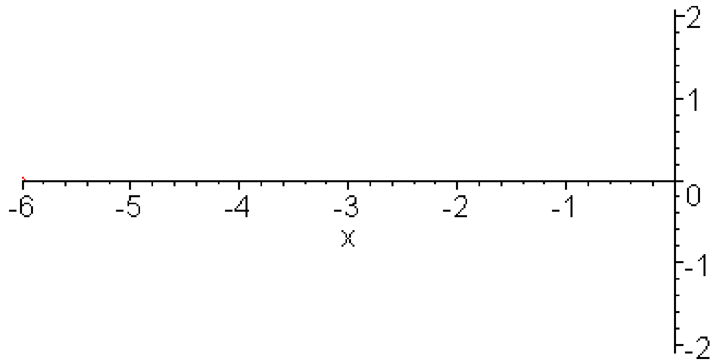
<u>Casamento de impedância:</u>

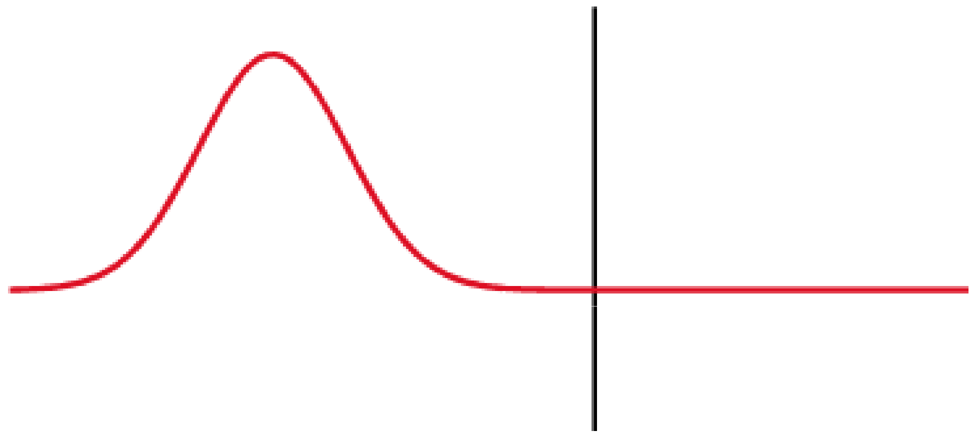
$Z_1 = Z_2 \rightarrow R_{12} = 0$

<u>extremidade fixa</u>

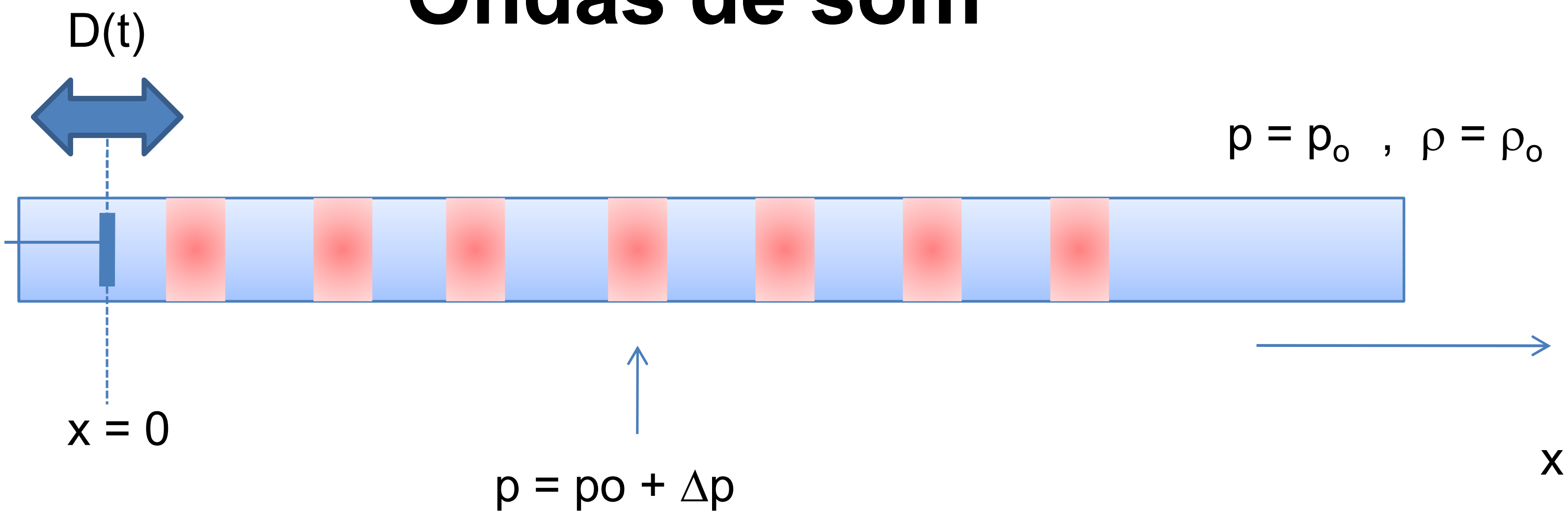
$Z_2 = \infty \rightarrow R_{12} = -1$

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$





Ondas de som



Velocidade do pistão = u(t) = dD(t)/dt

$\psi(x,t) = \Delta x(x,t) \rightarrow$ representa o deslocamento instantâneo na direção x de uma pequena quantidade de gás (x representa a posição de equilíbrio)

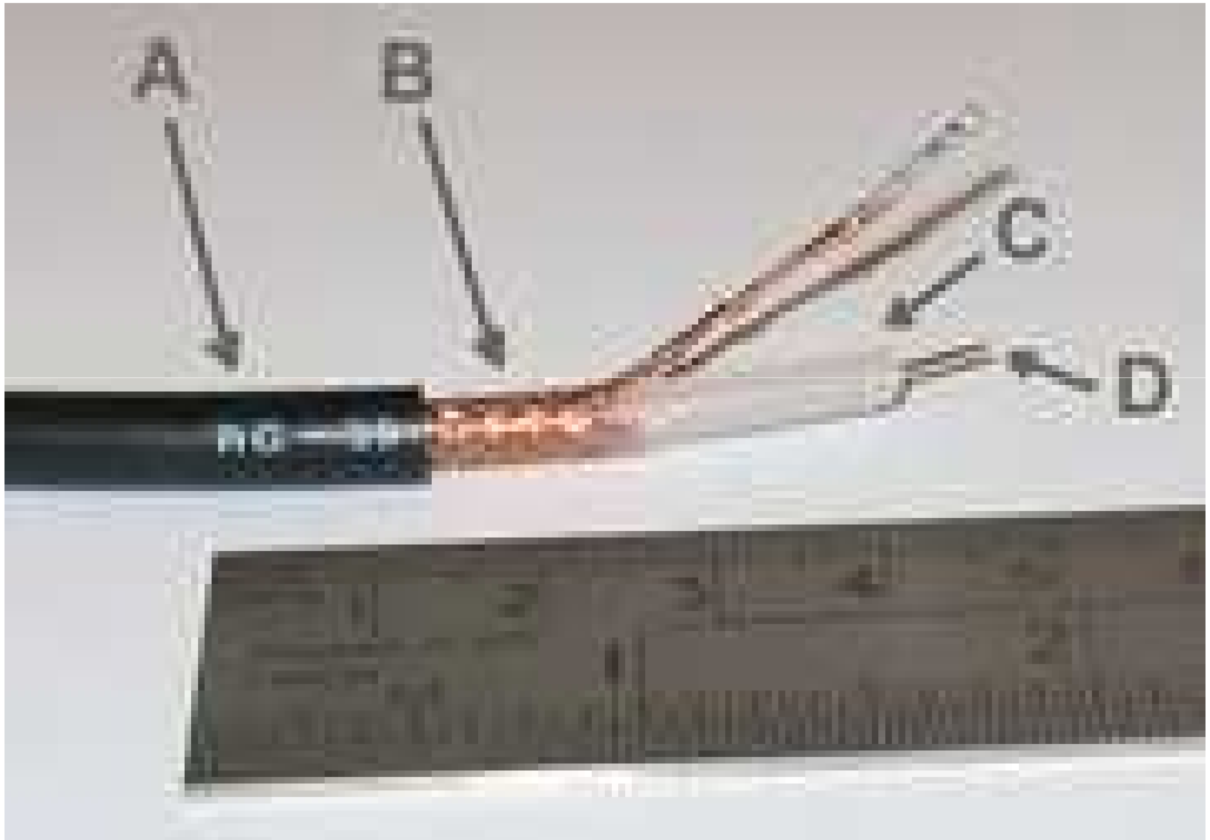
$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_o}{\rho_o}}$$

$$Z = \rho_o v = \sqrt{\gamma P_o \rho_o}$$

$Z_{ar} = (1{,}29 \times 10^{-3}\ \text{g/cm}^3) \times (3{,}32 \times 10^4\ \text{cm/s}) = 42{,}8\ \text{g/cm}^2 \cdot \text{s}$

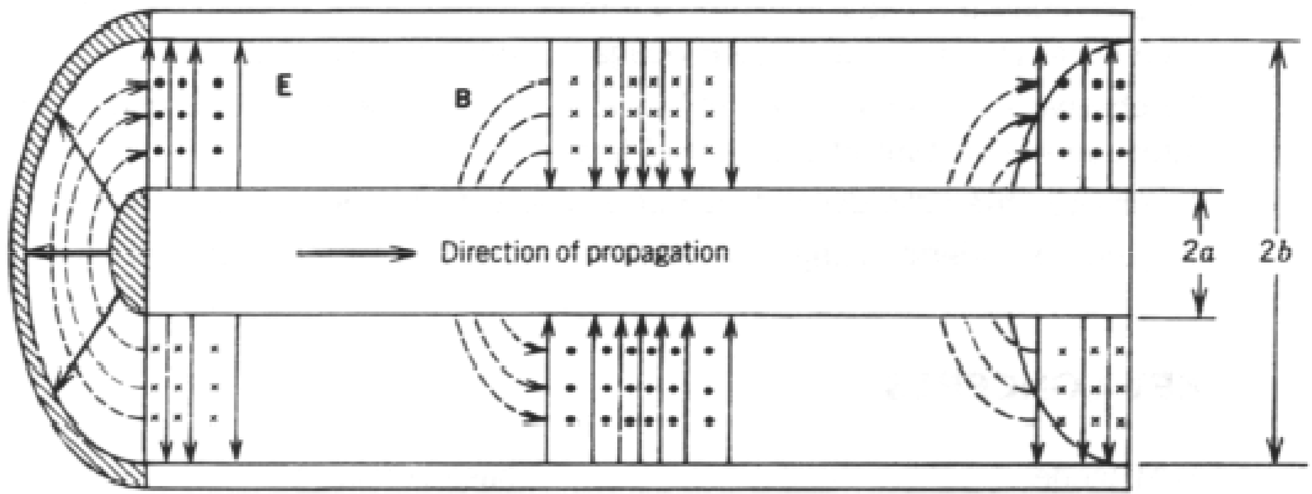
Z é a quantidade de massa por unidade de área por unidade de tempo que é varrida pela frente de onda.

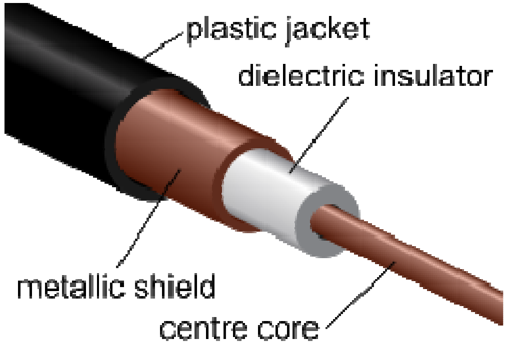
Cabos coaxiais

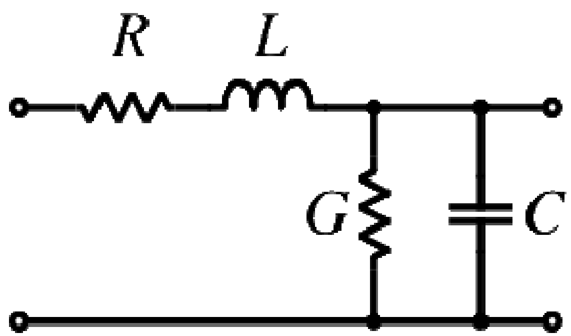


$$L = \frac{u}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{[H/m]}$$

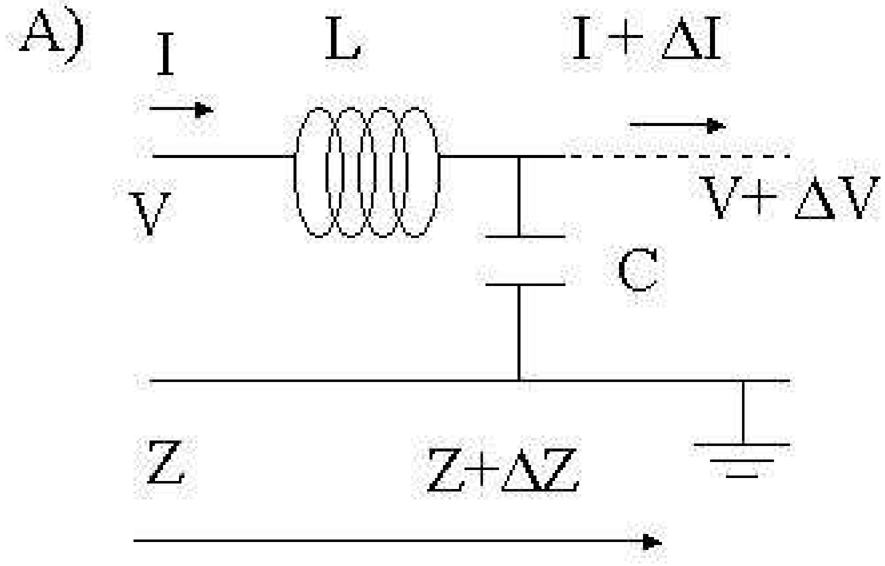
$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \text{[F/m]}$$



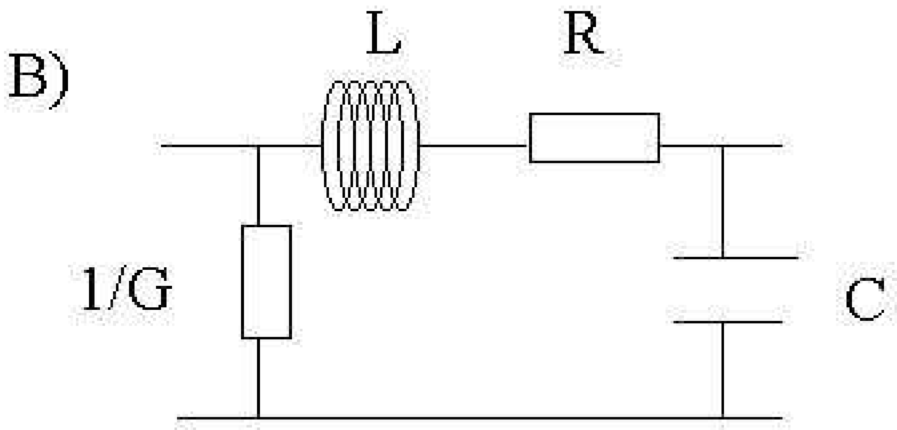




Circuito equivalente de uma unidade de linha de transmissão



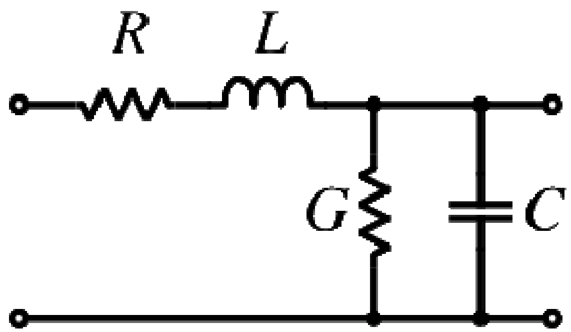
Cabo ideal



Cabo real

$$\Delta V(z,t) = -R\Delta z I(z,t) - L\Delta z \frac{\partial I(z,t)}{\partial t}$$

$$\Delta I(z,t) = -G\Delta z V(z,t) - C\Delta z \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}$$



Dividindo por ΔZ e levando no limite $\Delta Z \rightarrow 0$, encontramos as equações diferenciais

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GV - C\frac{\partial V}{\partial t}$$

Diferenciando com respeito a *z* e *t*, e substituindo, as equações podem ser desacopladas e resulta em

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

O cabo ideal sem perdas (R = G =0)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$V(z) = V_1 e^{i(\omega t - kz)} + V_2 e^{i(\omega t + kz)}$$

Velocidade de propagação

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

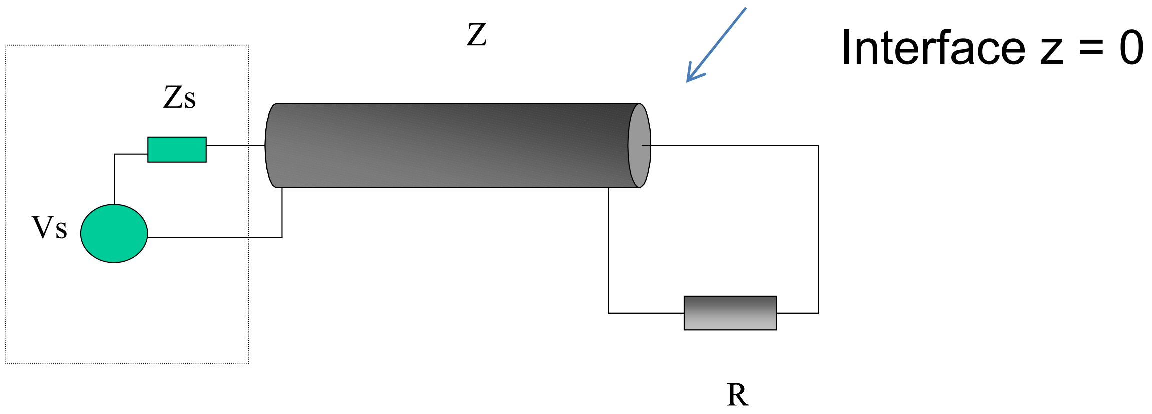
$$LC = \mu\varepsilon$$

A velocidade de propagação do sinal é freqüentemente expressa em termos de seu inverso, o tempo de propagação por unidade de comprimento $T = v^{-1} = (LC)^{1/2}$. Esta quantidade é conhecida como o atraso (*delay*) do cabo e é tipicamente da ordem de 5 ns/m para um cabo padrão de 50 Ω.

Impedância Característica

$$Z_o = \frac{V}{I}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



$$V_s = V_o + Z_s I_o$$

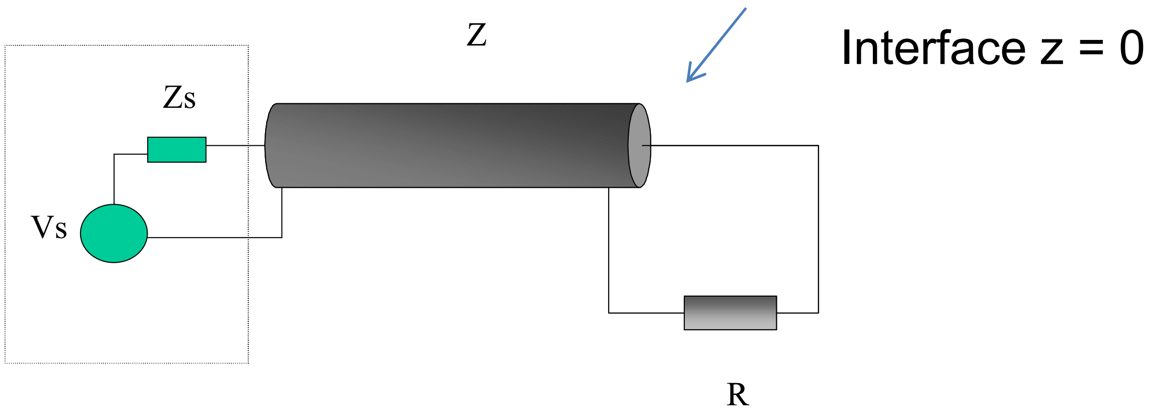
$$V_o = Z I_o$$

$$V_o = V_s \frac{Z}{Z_s + Z}$$

$$V(z,t) = V_o e^{i(wt+kz)} + V_r e^{i(wt-kz)}$$

$$i(z,t) = \frac{V_o}{Z} e^{i(wt-kz)} - \frac{V_r}{Z} e^{i(wt-kz)}$$

na interface z = 0



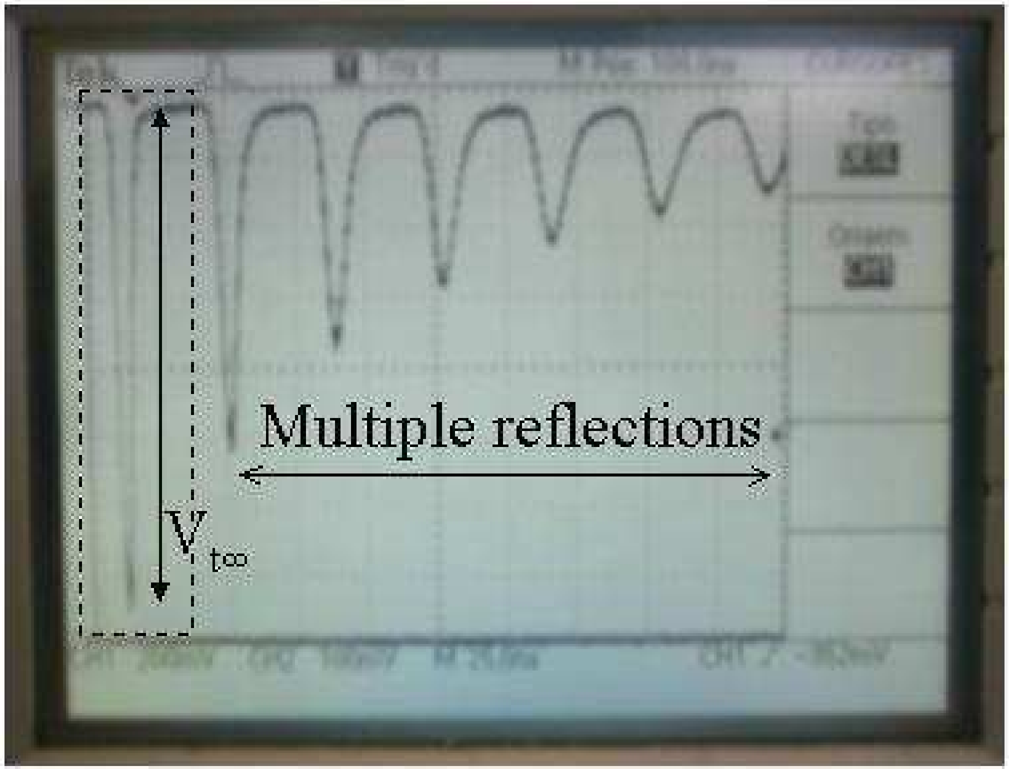
$$V(o,t) = Ri(o,t)$$

$$V_o e^{i(wt)} + V_r e^{i(wt)} = \frac{R}{Z}\left[V_o e^{i(wt)} - V_r e^{i(wt)}\right]$$

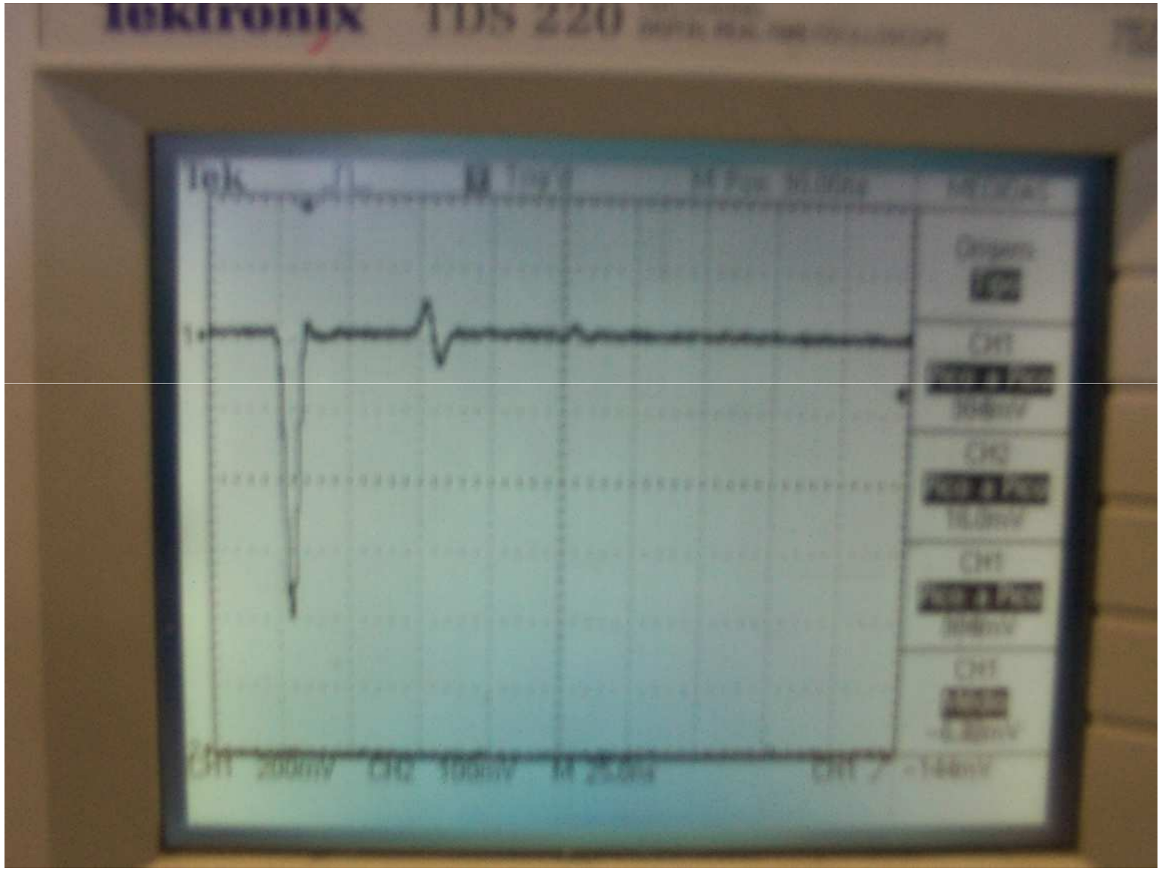
$$V_o + V_r = \frac{R}{Z}\left(V_o - V_r\right) = V_t = RI_t$$

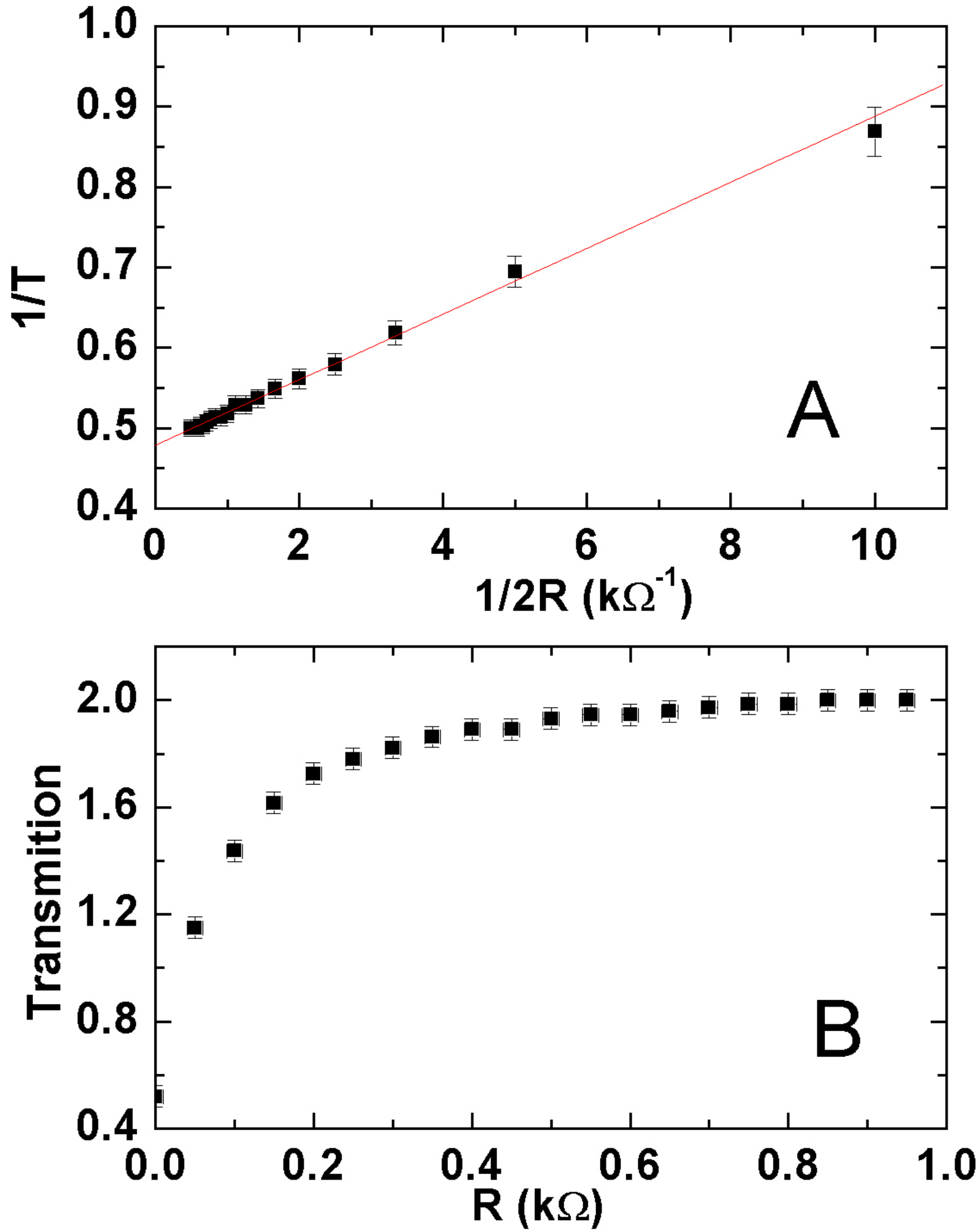
$$R_{12} = \frac{V_r}{V_o} = -\frac{I_r}{I_o} = \frac{R - Z}{R + Z}$$

$$T = \frac{V_t}{V_o} = \frac{2R}{R + Z}$$


Multiple reflections
$V_{t\infty}$

Casador de impedâncias


Tektronix
TDS 220


1/T
1/2R (kΩ^-1)
A
Transmition
R (kΩ)
B

Lista

Hecht capítulo 2 –

Exercícios segundo a sequência de Fibonacci

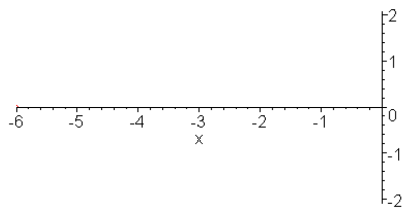
PURPOSE: To demonstrate the relationship between the phase velocity and the group velocity of a wavepacket.

DESCRIPTION: Two transparencies contain a series of equally spaced parallel lines. One transparency has a line spacing five percent smaller than the other. Place one transparency stationary onto the overhead, as shown in the photo above at left. Place the second transparency on top of the first and tilt it to create a small angle. Observe an interfernce pattern between the two overlapping transparencies, as shown above in the middle photo. The smaller the angle between the two transparencies the better the effect.
Keeping the first transpareny stationary, slide the second transparency across the OHD projector. The group velocity is seen to move rapidly across the picture, as shown in the photo at right. The movement of the phase velocity (motion of each transparency) is much slower than the fast moving group velocity.

EQUIPMENT: Transparencies, overhead projector.

SETUP NOTES: None.

To make your own transparencies, here is a jpg file of the parallel lines. To make your own demo, download this file and print it on your printer. Next, use a copy machine to make a one 1:1 transparency. Lastly, adjust the copy machine to zoom a 5% reduction, and make a second transparency. Now you have the demo!
References:
Robert Katz, Group-Phase Velocity Demonstrator, AJP 21, 388-389 (1953).
Eric Mendoza, Storm at Sea - An Illustration of Group Velocity, AJP 22, 208-211 (1954).
P. T. Demos, Device for the Visual Presentation of Group Velocity, AJP 25, 383-384 (1957).
N. F. Barber, Phase Velocity and Group Velocity, AJP 27, 120 (1959).
J. Mawdsely, Demonstrating Phase Velocity and Group Velocity, AJP 37, 842-843 (1969).
John Coenraads, notes: Phase and group velocity, TPT 11, 36-37 (1973).


-6
-5
-4
-3
-2
-1
x
2
1
0
-1
-2